楕円型分布における２つの共分散行列の同時推定問題

津熊 久幸　(千葉大学大学院 自然科学研究科)
今野 良彦　(千葉大学大学院 自然科学研究科)

本報告では, 誤差項が楕円型分布にしたがう２つの多変量線形モデル

$$\underset{N_1\times p}{Y_1} = \underset{N_1\times m}{A_1}\,\underset{m\times p}{\beta_1} + \underset{N_1\times p}{e_1}, \qquad \underset{N_2\times p}{Y_2} = \underset{N_2\times m}{A_2}\,\underset{m\times p}{\beta_2} + \underset{N_2\times p}{e_2}, \tag{1}$$

における共分散行列の同時推定問題を扱う. ただし, β_i は未知とし, 目的変数 Y_i と説明変数 A_i はそれぞれ既知とする ($i=1,2$). また, 誤差項 e_1 と e_2 は独立に楕円型分布にしたがうとし, それぞれ密度関数

$$|\Sigma_1|^{-N_1/2} g_1(\mathrm{tr}\,\Sigma_1^{-1}e_1'e_1), \qquad |\Sigma_2|^{-N_2/2} g_2(\mathrm{tr}\,\Sigma_2^{-1}e_2'e_2).$$

を持つとする. ただし, Σ_i は未知の $p\times p$ 正定値行列とし, $g_i(\,\cdot\,)$ は未知の１変数非負値関数とする.

いま, $\hat{\beta}_i$ を β_i の最小２乗推定量とし, $S_i=(Y_i-A_i\hat{\beta}_i)'(Y_i-A_i\hat{\beta}_i)$ とする. S_1 と S_2 に基づく, (Σ_1,Σ_2) の同時推定問題を損失関数

$$L(\tilde{\Sigma}_1,\tilde{\Sigma}_2;\Sigma_1,\Sigma_2)=\sum_{i=1}^{2}\{\mathrm{tr}\,\tilde{\Sigma}_i\Sigma_i^{-1}-\log|\tilde{\Sigma}_i\Sigma_i^{-1}|-p\} \tag{2}$$

のもとで考える. ただし, $\tilde{\Sigma}_i$ は Σ_i の推定量である.

ここで,

$$(\hat{\Sigma}_1,\ \hat{\Sigma}_2)=(B^{-1}\Phi B'^{-1},\ B^{-1}\Psi B'^{-1}) \tag{3}$$

なる推定量の族を考える. ただし, B と F をそれぞれ, $B(S_1+S_2)B'=I_p$, $BS_2B'=F$ を満たす非特異行列, 対角行列とする. また, F の対角成分 f_j は $f_1\geqslant f_2\geqslant\cdots\geqslant f_p>0$ を満たすとし, Φ と Ψ は F に依存する $p\times p$ 対角行列である.

Loh (1988, 1991) は, 任意の非特異行列 B について,

$$\hat{\Sigma}_i(BS_1B',\ BS_2B')=B\hat{\Sigma}_i(S_1,\ S_2)B', \quad i=1,\,2$$

なる変換に対するパラメータ (Σ_1,Σ_2) の共変推定量が (3) で与えられることを示している. さらに誤差項 e_1 と e_2 が多変量正規分布の場合において,

Loh (1988, 1991) は推定量 (3) のリスクの不偏推定量を求め, これを用いて, (Σ_1, Σ_2) の通常の推定量

$$(\hat{\Sigma}_1^{UB},\ \hat{\Sigma}_2^{UB}) = (S_1/(N_1 - m),\ S_2/(N_2 - m)) \tag{4}$$

や Stein 型推定量

$$(\hat{\Sigma}_1^{ST},\ \hat{\Sigma}_2^{ST}) = (T_1 D_1 T_1',\ T_2 D_2 T_2') \tag{5}$$

(ただし $S_i = T_i T_i'$, T_i は下三角行列, D_i は第 j 対角成分が $1/(N_i - m + p + 1 - 2j)$ の対角行列) を改良する推定量を導出している.

一方, 1 標本問題において, Kubokawa and Srivastava (1999) は, 楕円型分布モデルにおける Haff's identity を導出し, Stein 型推定量が通常の推定量 $\hat{\Sigma}_1^{UB}$ を改良するための十分条件を与えている.

Kubokawa and Srivastava (1999) による拡張された Haff's identity を用いることにより以下の定理が得られる.

定理： Φ^{AU} と Ψ^{AU} を対角成分がそれぞれ $\Phi_j^{AU} = (1 - f_j)/(N_1 - m - p - 1 + 2j)$, $\Psi_j^{AU} = f_j/(N_2 - m + p + 1 - 2j)$ $(j = 1, 2, \ldots, p)$ で与えられる対角行列とする. このとき損失 (2) のもとで, モデル (1) の (Σ_1, Σ_2) の推定量

$$(\hat{\Sigma}_1^{AU},\ \hat{\Sigma}_2^{AU}) = (B^{-1}\Phi^{AU}B'^{-1},\ B^{-1}\Psi^{AU}B'^{-1}) \tag{6}$$

は, 推定量 (4) と Stein 型推定量 (5) を改良する. □

上記の推定量 (6) 以外にも, Stein 型推定量 (5) を改良する推定量として, Dey–Srinivasan 型推定量

$$(\hat{\Sigma}_1^{DS},\ \hat{\Sigma}_2^{DS}) = (H_1 D_1 L_1 H_1',\ H_2 D_2 L_2 H_2') \tag{7}$$

(ただし $S_i = H_i L_i H_i'$, H_i は直交行列, L_i は対角行列) などが考えられる. しかし, 推定量 (6) との解析的比較は困難であるので, モンテカルロ実験によるリスクの比較検討を行った. このモンテカルロ実験の結果をみる限り, Dey–Srinivasan 型推定量 (7) が推定量 (6) よりよいことが分った. モンテカルロ実験による比較検討結果の詳細については発表時に報告する.

参考文献

Kubokawa and Srivastava (1999). *Ann. Statist.*, **27**, 600–609.

Loh, W. L. (1988). Ph. D. dissertation, Stanford Univ.

Loh, W. L. (1991). *Ann. Statist.*, **19**, 283–296.