Lattice conditional independece モデルにおける分散共分散行列の推定問題について[1]

今野良彦　千葉大学大学院自然科学研究科
konno@math.s.chiba-u.ac.jp

1. はじめに

多変量正規分布のモデリングの多くは平均行列と分散共分散行列を構造化する（制約を加える）ことと考えることができる．たとえば，MANOVA モデル，GMANOVA モデルおよびその拡張モデルは，$X : n \times p \sim N(\Xi, I_p \otimes \Sigma)$ としたときに，Ξ の構造の制約として表現が可能である．また，変量間の独立性，条件付き独立性，対称性は分散共分散行列およびその逆行列の構造化としてとらえることができる．変量間の独立性，条件付き独立性を表現するモデルの表現方法とその推測手法 (特に，最尤推定量や尤度比検定量）の導出に関する研究が 90 年代には盛んに行われた．特に，有向グラフや無向グラフなどを使って変量間の独立性，条件付き独立性を表現する Graphical model に関わる一連の研究（これらの理論的研究の成果は Lauritzen (1996) を参照されたい）があげられる．

表題の報告講演では，Andersson and Perlman (1993) により提案された，有向非巡回グラフモデルの部分集合である Lattice conditional independence モデルにおける分散共分散行列の推定問題を統計的決定理論の立場から議論するのが目的であった．講演の概略は以下である：1 節においては，多変量正規分布の分散共分散行列の推定問題を定式化し，既知の結果の簡単なおさらし，2 節では Lattice conditional independence model の定義とその性質を説明し，3 節ではこのモデルのもとでの分散共分散行列の推定問題を議論し，最尤推定量を改良する推定量の導出について報告を行った．最後に，3 変量正規分布の Lattice conditional independence model における推定量を具体的に構成に報告した.

2. 問題設定と主要な報告事項

集合 $I = \{1, 2, \ldots, p\}$ に対して，$\mathcal{K}$ を I の部分集合からなる分配環とし,（集合の）和と積について閉じて空集合を含むものとする．$X \sim N_p(0, \Sigma)$ とし，$K \in \mathcal{K}$ に対して，X_K を K の元に対応する座標の成分をもつ部分ベクトルとする．このとき，Lattice conditional independence (LCI) モデル $\boldsymbol{N}(\mathcal{K})$ を,

$$\begin{array}{c}\text{すべての } K_1, K_2 \in \mathcal{K} \text{ に対して，} X_{K_1 \cap K_2} \text{ を与えたときに} \\ X_{K_1} \text{ と } X_{K_2} \text{ は条件付きき独立}\end{array} \tag{1}$$

であるような多変量正規分布 $N(0, \Sigma)$ の集合とする．また，$\boldsymbol{P}_I(\mathcal{K})$ をすべての $L, K \in \mathcal{K}$ に対して，(1) を満足するような多変量正規分布の分散共分散行列の集まりとする．

LCI モデル $\boldsymbol{N}(\mathcal{K})$ からのランダム標本 $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(n)} (n \geq p)$ に基づいて分散共分散行列 Σ の推定問題を損失関数

$$\boldsymbol{L}(\hat{\Sigma}, \Sigma) = \mathrm{tr}(\hat{\Sigma}\Sigma^{-1}) - \log\det(\hat{\Sigma}\Sigma^{-1}) - p \tag{2}$$

[1] この報告の予稿は http://www.math.s.chiba-u.ac.jp/~konno/pdf/talk6.pdf に掲載.

のもとで考えることにする．ここで，$\hat{\Sigma}$ は Σ の推定量とした．この損失関数の期待値を取ったものを危険関数 (リスク) とよび，$\boldsymbol{R}(\hat{\Sigma},\Sigma)$ と記すことにする．推定量の良さを危険関数の (母数に関して一様な）比較によって評価する．

Andersson and Perlman (1993) では，LCI モデル $\boldsymbol{N}(\mathcal{K})$ の母数をうまく分解して，それらに対する最尤推定量を構成することで，$\Sigma \in \boldsymbol{P}_I(\mathcal{K})$ に対する最尤推定量を構成するアルゴリズムを与えている．本講演では，母数の次元がある条件をみたしているときには，損失関数 (2) のもとで，母数空間に推移的に作用する群に関して共変な推定量の族 (最尤推定量を含んだもの) の中で最良な推定量を構成することで最尤推定量の非許容性が示した．最尤推定量を一様に改良する得られた推定量は定数リスクをもつので，Hunt-Stein の定理により，導出された推定量がミニマックスであることを報告した．また，さらに，母数の次元がある条件をみたすときには，定数リスクのミニマックス推定量も一様に改良できることを報告した．

3. まとめ

ある群に関して共変な推定量の族 (最尤推定量を含む) の中で最良な推定量を構成することで最尤推定量の非許容性が示された．しかし，われわれの手法では，定数リスクのミニマックス推定量を改良できない場合には，定数リスクのミニマックス推定量が許容的かどうかは不明である．許容性という視点からはほとんど研究がされていないので，この点は課題として残されている．

また，Anderson (1984) に代表される多変量解析にあるモデルを広く拡張した多変量統計モデルを提案とその上で推測理論の展開が Andersson and Perlman (1993) の他に Andersson and Madsen (1998)，Massam and Neher (1998) がある． これらの論文では invariance がモデルの構成に重要な役割を果たしているので，この新しい多変量統計モデルのもとでも Stein の着想はうまく機能することが期待される．

4. 参考文献

Andersson, S.A. and Madsen, J. (1998): Symmetry and lattice conditional independence in a multivariate normal distribution, *Ann. Statist.* **26**, 525–572.

Andersson, S.A. and Perlman, M.D. (1993): Lattice models for conditional independence in a multivariate normal distribution, *Ann. Statist.* **21**, 1318–1358.

Dey, D.K. and Srinivasan, C. (1985): Estimation in a covariance matrix under Stein's loss, *Ann. Statist.* **13**, 1581–1591.

James, W. and Stein, C. (1961): Estimation with quadratic loss, *in Proc. Fourth Berkeley Symp. Math. Statist. Probab* **1**, Univ. California Press, 361–380.

Konno, Y. (2001): Inaddmissibility of the maximum likelihood estimator of normal covariance matrices with the lattice conditional independence, it J. Multivariate Anal. **79**, 33-51.

Lauritzen, S.L. (1996): Graphical models, Oxford statistical science series, Claredon press・Oxford

Massam, H. and Neher, E. (1998): Estimation and testing for lattice conditional independence models on Euclidean Jordan algebras, *Ann. Statist.* **26**, 1051–1082.

Stein, C. (1973): Estimation of mean of a multivariate normal distribution, *in Proceedings of Prague Symposium on Asymptotic Statistics*, pp. 345–381.