2 つの GMANOVA モデルにおける共通の回帰係数の推定について

津熊 久幸 (千葉大・自然科学)
今野 良彦 (千葉大・自然科学)

2 つの GMANOVA モデル

$$\underset{N_1\times p_1}{\boldsymbol{Y}_1} = \underset{N_1\times m}{\boldsymbol{A}_{11}}\ \underset{m\times q}{\boldsymbol{\Xi}}\ \underset{q\times p_1}{\boldsymbol{A}_{12}} + \underset{N_1\times p_1}{\boldsymbol{\epsilon}_1}, \qquad \underset{N_2\times p_2}{\boldsymbol{Y}_2} = \underset{N_2\times m}{\boldsymbol{A}_{21}}\ \underset{m\times q}{\boldsymbol{\Xi}}\ \underset{q\times p_2}{\boldsymbol{A}_{22}} + \underset{N_2\times p_2}{\boldsymbol{\epsilon}_2}$$

における共通の未知回帰係数 $\boldsymbol{\Xi}$ の推定問題を考える．ここで $\boldsymbol{A}_{i1}$ と $\boldsymbol{A}_{i2}$ $(i=1,\,2)$ はそれぞれ既知のフルランク行列, $\boldsymbol{\epsilon}_i$ は平均行列が零行列, 共分散行列が $\boldsymbol{I}_{N_i}\otimes\boldsymbol{\Omega}_i$ の正規分布に従う誤差行列, $\boldsymbol{\Omega}_i$ は未知の $p_i\times p_i$ 正定値行列である．また, $\boldsymbol{\epsilon}_1$ と $\boldsymbol{\epsilon}_2$ は互いに独立とする．適当な直行変換を施すことにより次の正準形を得る:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{X}_1|\ \boldsymbol{Z}_1 \sim N_{m\times q}(\boldsymbol{\Theta}+\boldsymbol{Z}_1\gamma_1, \boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{\Sigma}^{(1)}_{11\cdot 2}), \qquad \boldsymbol{X}_2|\ \boldsymbol{Z}_2 \sim N_{m\times q}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Theta}+\boldsymbol{Z}_2\gamma_2, \boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{\Sigma}^{(2)}_{11\cdot 2}),\\
&\boldsymbol{Z}_i \sim N_{m\times(p_i-q)}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{\Sigma}^{(i)}_{22}), \qquad \boldsymbol{S}_i\sim W_q(\boldsymbol{\Sigma}^{(i)}_{11\cdot 2}, n_i),\ n_i=N_i-m-p_i+q,\\
&\widehat{\gamma}_i|\ \boldsymbol{W}_i \sim N_{(p_i-q)\times q}(\gamma_i, \boldsymbol{W}_i^{-1}\otimes\boldsymbol{\Sigma}^{(i)}_{11\cdot 2}), \qquad \boldsymbol{W}_i\sim W_{p_i-q}(\boldsymbol{\Sigma}^{(i)}_{22}, n_i+p_i-q) \quad (i=1,\,2).
\end{aligned}$$

ただし, $\boldsymbol{\Theta}$, γ_i, $\boldsymbol{\Sigma}^{(i)}_{11\cdot 2}$, $\boldsymbol{\Sigma}^{(i)}_{22}$ はそれぞれ未知母数，$(\boldsymbol{X}_i,\,\boldsymbol{Z}_i)$, $(\boldsymbol{W}_i,\,\widehat{\gamma}_i)$, $\boldsymbol{S}_i$ はそれぞれ独立，$\boldsymbol{A}$ は既知の $m\times m$ 正則行列である．上記正準形のもとで, 共通のパラメータ $\boldsymbol{\Theta}$ の推定を損失関数

$$L(\widehat{\boldsymbol{\Theta}},\boldsymbol{\Theta}) = \operatorname{tr}\left[(\widehat{\boldsymbol{\Theta}}-\boldsymbol{\Theta})\{\boldsymbol{\Sigma}^{(1)}_{11\cdot 2}\}^{-1}(\widehat{\boldsymbol{\Theta}}-\boldsymbol{\Theta})'\right] + \operatorname{tr}\left[\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}(\widehat{\boldsymbol{\Theta}}-\boldsymbol{\Theta})\{\boldsymbol{\Sigma}^{(2)}_{11\cdot 2}\}^{-1}(\widehat{\boldsymbol{\Theta}}-\boldsymbol{\Theta})'\right]$$

のもとで考える．ここで，$\boldsymbol{C}$ は既知の $N_2\times m$ 定数行列である．さらに，リスクを $R(\widehat{\boldsymbol{\Theta}},\boldsymbol{\Theta}) = \mathbb{E}[L(\widehat{\boldsymbol{\Theta}},\boldsymbol{\Theta})]$ で定める．

$(\boldsymbol{\Sigma}^{(i)}_{11\cdot 2},\,\gamma_i)$ が既知のとき，1 標本問題における $\boldsymbol{\Theta}$ の最尤推定量はそれぞれ $\widetilde{\boldsymbol{\Theta}}_1$, $\boldsymbol{A}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{\Theta}}_2$ である．ただし，$\widetilde{\boldsymbol{\Theta}}_i=\boldsymbol{X}_i-\boldsymbol{Z}_i\gamma_i$, $(i=1,2)$ である．Sugiura & Kubokawa (1988) は，$\widetilde{\boldsymbol{\Theta}}_1$ と $\boldsymbol{A}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{\Theta}}_2$ の共分散 $\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{\Sigma}^{(1)}_{11\cdot 2}$ と $(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})^{-1}\otimes\boldsymbol{\Sigma}^{(2)}_{11\cdot 2}$ を重みとして利用する結合推定量より，$(\boldsymbol{\Sigma}^{(i)}_{11\cdot 2},\,\gamma_i)$ が未知の場合の Graybill-Deal 型の結合推定量を提案している．

しかし，結合比に重み $(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})^{-1}$ を考慮にいれた結合推定量は Sugiura & Kubokawa による Graybill-Deal 型の結合推定量以外はリスクの評価が非常に困難なので，結合比に重み $(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})^{-1}$ を考慮にいれない結合推定量を本報告では考え，新たな結合推定量の導出を試みる．

$\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{F}$ をそれぞれ, $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{S}_1+\boldsymbol{S}_2)\boldsymbol{B}'=\boldsymbol{I}_q$, $\boldsymbol{B}\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{B}'=\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{F}=\mathbf{diag}(f_1,\ldots,f_q)$ $(f_1\geq\cdots\geq f_q)$ を満たす非特異行列, 対角行列とする．ここで, 推定量の族

$$\widehat{\boldsymbol{\Theta}} = \widehat{\boldsymbol{\Theta}}_1\boldsymbol{B}'\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{B}')^{-1} + \boldsymbol{A}^{-1}\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_2\boldsymbol{B}'(\boldsymbol{I}_q-\boldsymbol{\Phi})(\boldsymbol{B}')^{-1}, \tag{1}$$

を考える．ただし, $\boldsymbol{\Phi}\equiv\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{F}) = \mathbf{diag}\,(\phi_1,\ldots,\phi_q)$，$\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_i=\boldsymbol{X}_i-\boldsymbol{Z}_i\widehat{\gamma}_i$, $(i=1,2)$ である．この推定量は, ある自然な変換に関する共変な推定量である．族 (1) 中に含まれる推定量として，

$$\begin{aligned}
\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{GD} &= \widehat{\boldsymbol{\Theta}}_1\boldsymbol{B}'\boldsymbol{\Phi}^{GD}(\boldsymbol{B}')^{-1} + \boldsymbol{A}^{-1}\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_2\boldsymbol{B}'(\boldsymbol{I}_q-\boldsymbol{\Phi}^{GD})(\boldsymbol{B}')^{-1},\\
\boldsymbol{\Phi}^{GD} &= \mathbf{diag}\,(\phi^{GD}_1,\ldots,\phi^{GD}_q), \quad \boldsymbol{\phi}^{GD}_j=\{n_1/(1-f_j)\}/\{n_1/(1-f_j)+n_2/f_j\}
\end{aligned}$$

があげられる．(1) における $\boldsymbol{\Phi}$ をうまく定めることにより, リスクの小さい推定量を求めることをめざす．

Stein's identity や Haff's identity などの部分積分法や, Loh (1991) による固有値に関する演算結果を用いて, リスクの不偏推定量を求め, これを評価することにより次のような推定量を得る:

$$\boldsymbol{\Phi}^{ST} = \mathbf{diag}\,(\phi_1^{ST}, \ldots, \phi_q^{ST}), \quad \phi_j^{ST} = \frac{\hat{\beta}_j^{ST}/(1-f_j)}{\hat{\beta}_j^{ST}/(1-f_j) + \hat{\alpha}_j^{ST}/f_j},$$
$$\hat{\alpha}_j^{ST} = (n_2 - q - 1)h_{2j} + (r_1 - r_2)f_j + 4h_{2j}(1-f_j) + 2h_{2j}\sum_{k\neq j}\frac{f_j(1-f_k)}{f_j - f_k},$$
$$\hat{\beta}_j^{ST} = (n_1 - q - 1)h_{1j} + (r_2 - r_1)(1-f_j) + 4h_{1j}f_j - 2h_{1j}\sum_{k\neq j}\frac{(1-f_j)f_k}{f_j - f_k},$$
$$h_{1j} = m\tilde{r}_1(1-f_j)/n_1 + \tilde{r}_2(\,\mathrm{tr}\,(\boldsymbol{A}')^{-1}\boldsymbol{A}^{-1})f_j/n_2,$$
$$h_{2j} = \tilde{r}_1(\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C})(1-f_j)/n_1 + \tilde{r}_2(\,\mathrm{tr}\,(\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1})'(\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}))f_j/n_2,$$
$$\tilde{r}_i = \frac{n_i + p_i - q - 1}{n_i - 1} = \frac{N_i - m - 1}{N_i - m - p_i + q - 1} \quad (i = 1, 2),$$
$$r_1 = m\tilde{r}_1, \qquad r_2 = \tilde{r}_2\,\mathrm{tr}\,(\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1})'(\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}).$$

モンテカルロシミュレーション　$\boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot2}^{(1)}$ と $\boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot2}^{(2)}$ がともに既知である場合の推定量

$$\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{KW} = [\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_1\{\boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot2}^{(1)}\}^{-1} + \boldsymbol{A}^{-1}\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_2\{\boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot2}^{(2)}\}^{-1}][\{\boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot2}^{(1)}\}^{-1} + \{\boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot2}^{(2)}\}^{-1}]^{-1}$$

のリスクを解析的に求めた．この推定量のリスクの値は, 最良の推定量のリスクの下限とみなすことができると思われる．また，重みに推定量を代入したものは

$$\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{GD} = [\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_1\{\boldsymbol{S}_1/n_1\}^{-1} + \boldsymbol{A}^{-1}\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_2\{\boldsymbol{S}_2/n_2\}^{-1}][\{\boldsymbol{S}_1/n_1\}^{-1} + \{\boldsymbol{S}_2/n_2\}^{-1}]^{-1}$$

となる．得られた推定量（式 (1) に $\boldsymbol{\Phi}^{ST}$ を入れたもの）と推定量 $\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{GD}$ のリスクを解析的評価は困難であるので, 数値実験によりリスクを比較した．ただし, 数値実験では Isotonic regression を用いて, $\{\phi_j^{ST}\}_{j=1}^q$ を修正した.

下の表は, $N_1 = N_2 = 12$, $p_1 = p_2 = 7$, $m = 2$, $q = 5$, $\boldsymbol{A} = \mathbf{diag}(\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}), \boldsymbol{C}'\boldsymbol{C} = \boldsymbol{I}_2$, $\boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{0}_{2\times5}$, $\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{(1)} = \boldsymbol{\Sigma}_{22}^{(2)} = \boldsymbol{I}_2$, $\boldsymbol{\gamma}_1 = \boldsymbol{\gamma}_2 = \boldsymbol{0}_{2\times5}$ とした場合のリスクの数値実験の結果である．表内の括弧内の数値は標準誤差の推定値である．表の結果より, $\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{GD}$ より $\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{ST}$ のほうがリスクが小さくなることがわかる.

表: $\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{ST}$ と $\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{GD}$ のリスクの推定値

$\boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot2}^{(2)}(\boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot2}^{(1)})^{-1}$	KW	GD	ST
$\mathbf{diag}\,(1,1,1,1,1)$	17.143	25.685 (0.166)	20.722 (0.127)
$\mathbf{diag}\,(10,1,1,1,0.1)$	17.143	26.399 (0.177)	24.096 (0.155)
$\mathbf{diag}\,(20,5,1,0.5,0.05)$	16.857	26.066 (0.175)	24.574 (0.159)
$\mathbf{diag}\,(5,2,1,0.5,0.2)$	17.143	26.134 (0.175)	23.354 (0.147)

推定量の導出のあらすじ, シミュレーション結果の詳細は, 発表当日に報告する.

参考文献

Loh, W.L. (1991). *Ann. Statist.*, **19** 297–313.

Sugiura, N. & Kubokawa, T. (1988). *Ann. Inst. Statist. Math.*, **40** 119–135.