日本統計学会

2002.9.9

2つのGMANOVAモデルにおける共通の回帰係数の推定について

千葉大学大学院 自然科学研究科
津熊 久幸

千葉大学大学院 自然科学研究科
今野 良彦

内容

モデル

$$
\underset{N_1\times p_1}{\boldsymbol{Y}_1} = \underset{N_1\times m}{\boldsymbol{A}_{11}} \underset{m\times q}{\boldsymbol{\Xi}} \underset{q\times p_1}{\boldsymbol{A}_{12}} + \underset{N_1\times p_1}{\boldsymbol{\epsilon}_1}
$$
$$
\underset{N_2\times p_2}{\boldsymbol{Y}_2} = \underset{N_2\times m}{\boldsymbol{A}_{21}} \underset{m\times q}{\boldsymbol{\Xi}} \underset{q\times p_2}{\boldsymbol{A}_{22}} + \underset{N_2\times p_2}{\boldsymbol{\epsilon}_2}
$$

ただし

- Ξ は未知母数
- Y_i, A_{ij} は既知 $(i = 1, 2,\ j = 1, 2)$
- $N_i > m$, $p_i \geq q$ $(i = 1, 2)$
- $\mathrm{rank}(A_{i1}) = m$, $\mathrm{rank}(A_{i2}) = q$ $(i = 1, 2)$
- ϵ_1 と ϵ_2 は互いに独立に正規分布にしたがうとする:

$$
\epsilon_i \sim \mathcal{N}_{N_i\times p_i}(0_{N_i\times p_i}, I_{N_i} \otimes \Omega_i)
$$
$$
\big(i.e.,\ \mathrm{vec}(\epsilon_i') \sim \mathcal{N}_{N_i\times p_i}(\mathrm{vec}(0'_{N_i\times p_i}), I_{N_i} \otimes \Omega_i)\big)
$$

ただし, Ω_i は未知の $p_i \times p_i$ 正定値行列.

(問題)

損失関数

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{L}(\widehat{\Xi},\ \Xi) \\
&\quad = \mathrm{tr}\,\{A_{11}(\widehat{\Xi} - \Xi)A_{12}\Omega_1^{-1}A_{12}'(\widehat{\Xi} - \Xi)'A_{11}'\} \\
&\qquad + \mathrm{tr}\,\{\widetilde{C}(\widehat{\Xi} - \Xi)A_{22}\Omega_2^{-1}A_{22}'(\widehat{\Xi} - \Xi)'\widetilde{C}'\},
\end{aligned}
$$

の下で <u>共通の回帰係数行列 Ξ を推定</u> すること．ただし，$\widehat{\Xi}$ は Ξ の推定量, $\widetilde{C}$ は $N_2 \times m$ 既知のフルランク行列

$\boxed{\text{正準系}}$ ある直行変換を施すことにより次の正準形を得る:

$$X_1 |\ Z_1 \sim \mathcal{N}_{m\times q}(\Theta + Z_1\gamma_1, I_m \otimes \Sigma_{11\cdot 2}^{(1)})$$
$$X_2 |\ Z_2 \sim \mathcal{N}_{m\times q}(A\Theta + Z_2\gamma_2, I_m \otimes \Sigma_{11\cdot 2}^{(2)})$$
$$\begin{cases} Z_i \sim \mathcal{N}_{m\times(p_i-q)}(0, I_m \otimes \Sigma_{22}^{(i)}) \\ S_i \sim \mathcal{W}_q(\Sigma_{11\cdot 2}^{(i)}, n_i),\ n_i = N_i - m - p_i + q \\ \widehat{\gamma}_i |\ W_i \sim \mathcal{N}_{(p_i-q)\times q}(\gamma_i,\ W_i^{-1} \otimes \Sigma_{11\cdot 2}^{(i)}) \\ W_i \sim \mathcal{W}_{p_i-q}(\Sigma_{22}^{(i)}, n_i + p_i - q) \quad (i = 1,\ 2) \end{cases}$$

ただし

- $\Theta,\ \gamma_i,\ \Sigma_{11\cdot 2}^{(i)},\ \Sigma_{22}^{(i)}$ はそれぞれ未知母数
- $(X_i,\ Z_i)$, $(W_i,\ \widehat{\gamma}_i)$, S_i はそれぞれ独立 ($i = 1, 2$ についても独立)
- A は既知の $m \times m$ 正則行列

上記正準形のもとで，共通の母数 Θ の推定を損失関数

$$\begin{aligned} L(\widehat{\Theta}, \Theta) = &\ \mathrm{tr}\,[(\widehat{\Theta} - \Theta)\{\Sigma_{11\cdot 2}^{(1)}\}^{-1}(\widehat{\Theta} - \Theta)'] \\ &+ \mathrm{tr}\,[C'C(\widehat{\Theta} - \Theta)\{\Sigma_{11\cdot 2}^{(2)}\}^{-1}(\widehat{\Theta} - \Theta)'] \end{aligned}$$

のもとで考える．ただし，C は既知の $N_2 \times m$ 定数行列

さらに，リスクを $\underline{R(\widehat{\Theta}, \Theta) = \mathbb{E}[L(\widehat{\Theta}, \Theta)]}$ で定める

$\boxed{\text{先行研究}}$ Sugiura & Kubokawa (1988)

$(\Sigma_{11\cdot 2}^{(i)},\ \gamma_i)$ が既知の場合

1標本問題におけるΘの最尤推定量はそれぞれ

$$\widetilde{\Theta}_1, \quad A^{-1}\widetilde{\Theta}_2 \quad (\widetilde{\Theta}_i = X_i - Z_i\gamma_i)$$

$\Downarrow$

重みに$\{I_m \otimes \Sigma_{11\cdot 2}^{(1)}\}^{-1}$ と$\{(A'A)^{-1} \otimes \Sigma_{11\cdot 2}^{(2)}\}^{-1}$ を利用する結合推定量(2標本問題におけるΘの最尤推定量)

$$\begin{aligned}\mathrm{vec}\,((\widetilde{\Theta}^{ML})') = &\Big[I_m \otimes \{\Sigma_{11\cdot 2}^{(1)}\}^{-1} + (A'A) \otimes \{\Sigma_{11\cdot 2}^{(2)}\}^{-1}\Big]^{-1} \\ &\times\Big[I_m \otimes \{\Sigma_{11\cdot 2}^{(1)}\}^{-1}\,\mathrm{vec}\,(\widetilde{\Theta}_1') \\ &\qquad + (A'A) \otimes \{\Sigma_{11\cdot 2}^{(2)}\}^{-1}\,\mathrm{vec}\,((A^{-1}\widetilde{\Theta}_2)')\Big]\end{aligned}$$

$\Downarrow$

$(\Sigma_{11\cdot 2}^{(i)},\ \gamma_i)$が未知の場合

Graybill-Deal型の結合推定量

$$\begin{aligned}\mathrm{vec}\,((\widetilde{\Theta}^{GD})') = &\Big[I_m \otimes \{S_1/n_1\}^{-1} + (A'A) \otimes \{S_2/n_2\}^{-1}\Big]^{-1} \\ &\times\Big[I_m \otimes \{S_1/n_1\}^{-1}\,\mathrm{vec}\,(\widehat{\Theta}_1') \\ &\qquad + (A'A) \otimes \{S_2/n_2\}^{-1}\,\mathrm{vec}\,((A^{-1}\widehat{\Theta}_2)')\Big]\end{aligned}$$

を提案. ただし, $\widehat{\Theta}_i = X_i - Z_i\widehat{\gamma}_i$

$$
\begin{aligned}
X_1|\ Z_1 &\sim \mathcal{N}_{m\times q}(\Theta + Z_1\gamma_1, I_m \otimes \Sigma_{11\cdot 2}^{(1)}) \\
X_2|\ Z_2 &\sim \mathcal{N}_{m\times q}(A\Theta + Z_2\gamma_2, I_m \otimes \Sigma_{11\cdot 2}^{(2)}) \\
S_1 &\sim \mathcal{W}_q(\Sigma_{11\cdot 2}^{(1)}, n_i) \\
S_2 &\sim \mathcal{W}_q(\Sigma_{11\cdot 2}^{(2)}, n_i)
\end{aligned}
$$

$\Sigma_{11\cdot 2}^{(1)}$と$\Sigma_{11\cdot 2}^{(2)}$のそれぞれをS_1とS_2を用いて同時に推定し，結合比を構成することを考える

$\Downarrow$

しかし，結合比に重み$(A'A)$を考慮にいれたΘの結合推定量はリスクの評価が非常に煩雑

$\Downarrow$

結合比に重み$(A'A)$を考慮しないΘの結合推定量を考え，新たな結合推定量の導出を試みる

注意: $A'A = I_m$のときのGraybill-Deal型推定量

$$
\begin{aligned}
\widehat{\Theta}^{GD} = \widehat{\Theta}_1\{S_1/n_1\}^{-1}\Big[\{S_1/n_1\}^{-1} + \{S_2/n_2\}^{-1}\Big]^{-1} \\
+ A^{-1}\widehat{\Theta}_2\{S_2/n_2\}^{-1}\Big[\{S_1/n_1\}^{-1} + \{S_2/n_2\}^{-1}\Big]^{-1}
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{推定量}}$ BとFを，$B(S_1+S_2)B' = I_q$，$BS_2B' = F$，$F = \mathrm{diag}\,(f_1,\ldots,f_q)$ $(f_1 \geq \cdots \geq f_q)$を満たす非特異行列，対角行列とする．このとき，推定量の族

$$\widehat{\Theta} = \widehat{\Theta}_1 B'\Phi(B')^{-1} + A^{-1}\widehat{\Theta}_2 B'(I_q - \Phi)(B')^{-1}$$

を考える． ただし，$\Phi \equiv \Phi(F) = \mathrm{diag}\,(\phi_1,\ldots,\phi_q)$，$\widehat{\Theta}_i = X_i - Z_i\widehat{\gamma}_i\,(i=1,2)$

- 特徴: <u>ある自然な変換に関する共変な推定量である</u>
- ‘vec’による表現: $\Phi = \Phi_\beta(\Phi_\alpha + \Phi_\beta)^{-1}$として

$$\begin{aligned}\mathrm{vec}\,(\widehat{\Theta}') = &\Big[I_m \otimes \{B^{-1}\Phi_\beta(B')^{-1}\}^{-1} + I_m \otimes \{B^{-1}\Phi_\alpha(B')^{-1}\}^{-1}\Big]^{-1}\\ &\times\Big[I_m \otimes \{B^{-1}\Phi_\beta(B')^{-1}\}^{-1}\,\mathrm{vec}\,(\widehat{\Theta}_1')\\ &\quad + I_m \otimes \{B^{-1}\Phi_\alpha(B')^{-1}\}^{-1}\,\mathrm{vec}\,((A^{-1}\widehat{\Theta}_2)')\Big]\end{aligned}$$

ここで，$B^{-1}\Phi_\beta(B')^{-1}$と$B^{-1}\Phi_\alpha(B')^{-1}$はそれぞれ$\Sigma_{11\cdot 2}^{(1)}$と$\Sigma_{11\cdot 2}^{(2)}$の推定量

上記共変推定量の族におけるΦをうまく定めることにより，リスクの小さい推定量を求めることをめざす

<u>導出方法</u>

上記推定量の族に対するリスクの不偏推定量を計算

$\Downarrow$

そのリスクの不偏推定量を近似・評価

$\Downarrow$

よりよいΦの候補を導出

モンテカルロシミュレーション

上記の方法により導出された推定量とGraybill-Deal型推定量のリスクの大小関係は，理論的に示すことができなかった $\Longrightarrow$ 数値実験で改良されているか調べた

- $(\Sigma_{11\cdot 2}^{(i)}, \gamma_i)$ が既知の推定量(MLE)

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{vec}\,((\widetilde{\Theta}^{ML})') \\
&\quad = \left[I_m \otimes \{\Sigma_{11\cdot 2}^{(1)}\}^{-1} + (A'A) \otimes \{\Sigma_{11\cdot 2}^{(2)}\}^{-1} \right]^{-1} \\
&\qquad \times \Big[I_m \otimes \{\Sigma_{11\cdot 2}^{(1)}\}^{-1}\,\mathrm{vec}\,(\widetilde{\Theta}_1') \\
&\qquad\qquad + (A'A) \otimes \{\Sigma_{11\cdot 2}^{(2)}\}^{-1}\,\mathrm{vec}\,((A^{-1}\widetilde{\Theta}_2)') \Big]
\end{aligned}
$$

- Graybill-Deal型推定量

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{vec}\,((\widetilde{\Theta}^{GD})') \\
&\quad = \left[I_m \otimes \{S_1/n_1\}^{-1} + (A'A) \otimes \{S_2/n_2\}^{-1} \right]^{-1} \\
&\qquad \times \Big[I_m \otimes \{S_1/n_1\}^{-1}\,\mathrm{vec}\,(\widehat{\Theta}_1') \\
&\qquad\qquad + (A'A) \otimes \{S_2/n_2\}^{-1}\,\mathrm{vec}\,((A^{-1}\widehat{\Theta}_2)') \Big]
\end{aligned}
$$

- Haff-Stein型推定量

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{vec}\,((\widetilde{\Theta}^{HS})') \\
&= \left[I_m \otimes \{B^{-1}\Phi_\beta^{HS}(B')^{-1}\}^{-1} + (A'A) \otimes \{B^{-1}\Phi_\alpha^{HS}(B')^{-1}\}^{-1} \right]^{-1} \\
&\quad \times \Big[I_m \otimes \{B^{-1}\Phi_\beta^{HS}(B')^{-1}\}^{-1}\,\mathrm{vec}\,(\widehat{\Theta}_1') \\
&\qquad + (A'A) \otimes \{B^{-1}\Phi_\alpha^{HS}(B')^{-1}\}^{-1}\,\mathrm{vec}\,((A^{-1}\widehat{\Theta}_2)') \Big]
\end{aligned}
$$

Haff-Stein型推定量

$$\begin{cases} \Phi_\beta^{HS} = \mathbf{diag}\,(\hat{\beta}_1^{HS}/(1-f_1),\ldots,\hat{\beta}_q^{HS}/(1-f_q)) \\ \Phi_\alpha^{HS} = \mathbf{diag}\,(\hat{\alpha}_1^{HS}/f_1,\ldots,\hat{\alpha}_q^{HS}/f_q) \end{cases}$$

- $$\hat{\alpha}_j^{HS} = (n_2-q-1)h_{2j} + (r_1-r_2)f_j + 4h_{2j}(1-f_j) + 2h_{2j}\sum_{k\neq j}\frac{f_j(1-f_k)}{f_j-f_k}$$
- $$\hat{\beta}_j^{HS} = (n_1-q-1)h_{1j} + (r_2-r_1)(1-f_j) + 4h_{1j}f_j - 2h_{1j}\sum_{k\neq j}\frac{(1-f_j)f_k}{f_j-f_k}$$
- $$h_{1j} = m\tilde{r}_1(1-f_j)/n_1 + \tilde{r}_2(\mathrm{tr}\,(AA')^{-1})f_j/n_2$$
- $$h_{2j} = \tilde{r}_1(\mathrm{tr}\,C'C)(1-f_j)/n_1 + \tilde{r}_2(\mathrm{tr}\,(CA^{-1})'(CA^{-1}))f_j/n_2$$
- $r_1 = m\tilde{r}_1,\qquad r_2 = \tilde{r}_2\mathrm{tr}\,(CA^{-1})'(CA^{-1})$
- $$\tilde{r}_i = \frac{n_i+p_i-q-1}{n_i-1} = \frac{N_i-m-1}{N_i-m-p_i+q-1}$$

　ただし，シミュレーションではIsotonic regressionを用いて，$\{\hat{\alpha}_j^{HS}/f_j\}_{j=1}^q$と$\{\hat{\beta}_j^{HS}/(1-f_j)\}_{j=1}^q$をそれぞれ順序付けの修正を施したものを使用

設定: シミュレーションの回数は10,000回

- $N_1 = N_2 = 12,\ p_1 = p_2 = 7,\ m = 2,\ q = 5$
- $A'A = \mathrm{diag}(\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}), C'C = I_2$
- $\Theta = 0_{2\times 5},\ \Sigma_{22}^{(1)} = \Sigma_{22}^{(2)} = I_2,\ \gamma_1 = \gamma_2 = 0_{2\times 5}$
- **改良率**: $100 \times (1 - \widehat{R}^{*HS}/\widehat{R}^{*GD})\%$
  $\widehat{R}^{*HS}, \widehat{R}^{*GD}$はそれぞれ数値実験による
  $\widehat{\Theta}^{HS}$と$\widehat{\Theta}^{GD}$のリスクの推定値
- 表内の括弧内: 標準誤差の推定値

$\Sigma_{11\cdot 2}^{(2)}(\Sigma_{11\cdot 2}^{(1)})^{-1}$	ML	GD	HS	改良率
diag $(1, 1, 1, 1, 1)$	10.000	20.394 (0.132)	16.577 (0.101)	18.7 %
diag $(10, 1, 1, 1, 0.1)$	10.804	22.151 (0.148)	20.627 (0.136)	6.9 %
diag $(20, 5, 1, 1/5, 1/20)$	11.529	23.162 (0.156)	22.898 (0.155)	1.1 %
diag $(16, 8, 4, 2, 1)$	9.588	20.674 (0.155)	16.117 (0.104)	22.0 %
diag $(100, 100, 100, 100, 100)$	9.936	20.428 (0.376)	13.602 (0.128)	33.4 %
diag $(10^{10}, 10^4, 1, 10^{-4}, 10^{-10})$	12.666	25.933 (0.196)	26.277 (0.200)	-1.3 %

結論

GMANOVAモデルにおける2標本問題において，数値実験の結果より

- 全体的に，Haff-Stein型推定量 $\widehat{\Theta}^{HS}$ は，Graybill-Deal型推定量 $\widehat{\Theta}^{GD}$ を改良している
- Haff-Stein型推定量に関して，$\Sigma_{11\cdot 2}^{(2)}(\Sigma_{11\cdot 2}^{(1)})^{-1}$ の各対角要素が近いとき改良率がよい．逆に，$\Sigma_{11\cdot 2}^{(2)}(\Sigma_{11\cdot 2}^{(1)})^{-1}$ の最大最小の対角要素の比が大きいとき，改良率はよくない

今後の課題

- 実際のデータへの応用

参考文献

1. Loh, W.L. (1991). Ann. Statist., 19 297–313.
2. Sugiura, N. & Kubokawa, T. (1988). Ann. Inst. Statist. Math., 40 119–135.
3. Lin, S.P. & Perlman, M.D. (1985). In ‘Multivariate Analysis VI’ (P.K. Krishnaiah, ed.) 411-429.

推定量Θのリスク

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{R}(\widehat{\boldsymbol{\Theta}}, \boldsymbol{\Theta}) \\
&= \mathbb{E}\Bigg[q(r_2 - r_1) + \sum_{j=1}^{q} \Bigg\{ 2(r_1 - r_2)\phi_j \\
&\qquad + (n_1 - q - 1)\frac{(1-\phi_j)^2}{1-f_j}\{H_1\}_{jj} \\
&\qquad + 4\{H_1\}_{jj}(1-\phi_j) f_j \frac{\partial \phi_j}{\partial f_j} \\
&\qquad + 2\sum_{k \neq j}\{H_1\}_{jj}(1-\phi_j)(\phi_j - \phi_k)\frac{f_k}{f_j - f_k} \\
&\qquad + (n_2 - q - 1)\frac{\phi_j^2}{f_j}\{H_2\}_{jj} \\
&\qquad + 4\{H_2\}_{jj}\phi_j (1 - f_j)\frac{\partial \phi_j}{\partial f_j} \\
&\qquad + 2\sum_{k \neq j}\{H_2\}_{jj}\phi_j(\phi_j - \phi_k)\frac{1-f_k}{f_j - f_k} \Bigg\} \Bigg]
\end{aligned}
$$

ただし，$r_1 = m\dfrac{n_1 + p_1 - q - 1}{n_1 - 1}$

$$
r_2 = \frac{n_2 + p_2 - q - 1}{n_2 - 1}\mathrm{tr}\left\{(CA^{-1})'(CA^{-1})\right\}
$$

$$
H_1 = B(\widehat{\Theta}_1 - A^{-1}\widehat{\Theta}_2)'(\widehat{\Theta}_1 - A^{-1}\widehat{\Theta}_2)B'
$$

$$
H_2 = B(\widehat{\Theta}_1 - A^{-1}\widehat{\Theta}_2)'(C'C)(\widehat{\Theta}_1 - A^{-1}\widehat{\Theta}_2)B'
$$

$\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{KW}$ のリスク

$$\begin{aligned} R(\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{KW}, \boldsymbol{\Theta}) = & \, m\tilde{r}_1 \mathrm{tr}\, \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}^2 (\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}} + \boldsymbol{I}_q)^{-2} \\ & + \tilde{r}_2 \mathrm{tr}\, (\boldsymbol{A}')^{-1} \boldsymbol{A}^{-1} \mathrm{tr}\, \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}} (\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}} + \boldsymbol{I}_q)^{-2} \\ & + \tilde{r}_2 \mathrm{tr}\, (\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1})' \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} \mathrm{tr}\, (\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}} + \boldsymbol{I}_q)^{-2} \\ & + \tilde{r}_1 \mathrm{tr}\, \boldsymbol{C}'\boldsymbol{C} \mathrm{tr}\, \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}} (\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}} + \boldsymbol{I}_q)^{-2} \end{aligned}$$

ただし，$\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}} = \boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot 2}^{(2)} {\boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot 2}^{(1)}}^{-1}$

vec$((\widetilde{\boldsymbol{\Theta}}^{ML})')$ のリスク

$$\begin{aligned} & R(\widehat{\boldsymbol{\Theta}}^{ML}, \boldsymbol{\Theta}) \\ & \quad = \mathrm{tr} \left\{ \left[\boldsymbol{I}_m \otimes \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}} + (\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}) \otimes \boldsymbol{I}_q \right] \right. \\ & \qquad \left. \times \left[\boldsymbol{I}_m \otimes \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}} + (\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}) \otimes \boldsymbol{I}_q \right]^{-1} \right\} \end{aligned}$$

ただし，$\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}} = \boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot 2}^{(2)} {\boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot 2}^{(1)}}^{-1}$

モンテカルロシミュレーション (2)

- **数値実験により，いくつかの推定量のリスクを比較**

推定量

- $$\widehat{\Theta}^{KW} = \widehat{\Theta}_1\{\Sigma_{11\cdot 2}^{(1)}\}^{-1}\Big[\{\Sigma_{11\cdot 2}^{(1)}\}^{-1} + \{\Sigma_{11\cdot 2}^{(2)}\}^{-1}\Big]^{-1}$$
$$+A^{-1}\widehat{\Theta}_2\{\Sigma_{11\cdot 2}^{(2)}\}^{-1}\Big[\{\Sigma_{11\cdot 2}^{(1)}\}^{-1} + \{\Sigma_{11\cdot 2}^{(2)}\}^{-1}\Big]^{-1}$$

- $$\widehat{\Theta}^{AL} = \widehat{\Theta}_1\{S_1/n_1\}^{-1}\Big[\{S_1/n_1\}^{-1} + \{S_2/n_2\}^{-1}\Big]^{-1}$$
$$+A^{-1}\widehat{\Theta}_2\{S_2/n_2\}^{-1}\Big[\{S_1/n_1\}^{-1}+\{S_2/n_2\}^{-1}\Big]^{-1}$$
$$= \widehat{\Theta}_1 B'\Phi^{AL}(B')^{-1}$$
$$+A^{-1}\widehat{\Theta}_2 B'(I_q - \Phi^{AL})(B')^{-1}$$
$$\Phi^{AL} = \mathrm{diag}\,(\phi_1^{AL}, \ldots, \phi_q^{AL})$$
$$\phi_j^{AL} = \{n_1/(1-f_j)\}/\{n_1/(1-f_j) + n_2/f_j\}$$

- $$\widehat{\Theta}^{HS} = \widehat{\Theta}_1 B'\Phi^{HS}(B')^{-1}$$
$$+A^{-1}\widehat{\Theta}_2 B'(I_q - \Phi^{HS})(B')^{-1}$$

ただし，$\Phi^{HS} = \Phi_\beta^{HS}(\Phi_\alpha^{HS} + \Phi_\beta^{HS})^{-1}$

設定: シミュレーションの回数は 10,000 回

- $N_1 = N_2 = 12,\ p_1 = p_2 = 7,\ m = 2,\ q = 5$
- $A'A = \mathrm{diag}(\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}), C'C = I_2$
- $\Theta = 0_{2\times 5},\ \Sigma_{22}^{(1)} = \Sigma_{22}^{(2)} = I_2,\ \gamma_1 = \gamma_2 = 0_{2\times 5}$
- **改良率:** $100 \times (1 - \widehat{R}^{*HS}/\widehat{R}^{*AL})\%$
  $\widehat{R}^{*HS}, \widehat{R}^{*AL}$ **はそれぞれ数値実験による**
  $\widehat{\Theta}^{HS}$ **と** $\widehat{\Theta}^{AL}$ **のリスクの推定値**
- **表内の括弧内: 標準誤差の推定値**

$\Sigma_{11\cdot 2}^{(2)}(\Sigma_{11\cdot 2}^{(1)})^{-1}$	KW	AL	HS	改良率
diag $(1, 1, 1, 1, 1)$	17.143	25.685 (0.166)	20.722 (0.127)	19.3 %
diag $(10, 1, 1, 1, 0.1)$	17.143	26.399 (0.177)	24.096 (0.155)	8.7 %
diag $(20, 5, 1, 1/5, 1/20)$	17.143	26.126 (0.174)	25.345 (0.164)	3.0 %
diag $(16, 8, 4, 2, 1)$	14.920	28.020 (0.233)	19.740 (0.145)	29.6 %
diag $(100, 100, 100, 100, 100)$	12.942	26.602 (0.719)	14.198 (0.242)	46.6 %
diag $(10^{10}, 10^4, 1, 10^{-4}, 10^{-10})$	17.143	26.886 (0.200)	26.857 (0.200)	0.1 %

Table 1: 重みに $A'A$ を考慮しない場合

	KW	AL	HS	改良率
diag $(1, 1, 1, 1, 1)$	17.143	25.685 (0.166)	20.722 (0.127)	19.3 %
diag $(10, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1)$	19.247	27.819 (0.194)	26.839 (0.188)	3.5 %
diag $(10, 10, 10, 0.1, 0.1)$	16.442	26.933 (0.200)	25.260 (0.181)	6.2 %
diag $(10, 1, 1, 1, 0.1)$	17.143	26.399 (0.177)	24.096 (0.155)	8.7 %
diag $(10, 10, 1, 0.1, 0.1)$	17.143	26.466 (0.186)	25.544 (0.172)	3.5 %
diag $(20, 5, 1, 1/5, 1/20)$	17.143	26.126 (0.174)	25.345 (0.164)	3.0 %
diag $(5, 2, 1, 0.5, 0.2)$	17.143	26.134 (0.175)	23.354 (0.147)	10.6 %
diag $(16, 8, 4, 2, 1)$	14.920	28.020 (0.233)	19.740 (0.145)	29.6 %
diag $(1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16)$	19.366	27.519 (0.175)	25.485 (0.158)	7.4 %
diag $(100, 100, 100, 100, 100)$	12.942	26.602 (0.719)	14.198 (0.242)	46.6 %
diag $(0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01)$	21.344	28.592 (0.374)	25.063 (0.284)	12.3 %
diag $(10^{10}, 5, 1, 1/5, 10^{-10})$	17.143	26.505 (0.185)	26.095 (0.181)	1.5 %
diag $(10^{10}, 10^{-10}, 10^{-10}, 10^{-10}, 10^{-10})$	19.714	26.521 (0.194)	26.521 (0.194)	0.0 %
diag $(10^{10}, 10^{4}, 1, 10^{-4}, 10^{-10})$	17.143	26.886 (0.200)	26.857 (0.200)	0.1 %

Table 2: 重みに $A'A$ を考慮する場合

	ML	GD	HS	改良率
diag $(1, 1, 1, 1, 1)$	10.000	20.394 (0.132)	16.577 (0.101)	18.7 %
diag $(10, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1)$	13.484	27.317 (0.198)	25.925 (0.185)	5.1 %
diag $(10, 10, 10, 0.1, 0.1)$	11.519	23.890 (0.170)	22.985 (0.161)	3.8 %
diag $(10, 1, 1, 1, 0.1)$	10.804	22.151 (0.148)	20.627 (0.136)	6.9 %
diag $(10, 10, 1, 0.1, 0.1)$	11.608	23.520 (0.165)	23.074 (0.160)	1.9 %
diag $(20, 5, 1, 1/5, 1/20)$	11.529	23.162 (0.156)	22.898 (0.155)	1.1 %
diag $(5, 2, 1, 0.5, 0.2)$	10.614	21.676 (0.147)	19.435 (0.125)	10.3 %
diag $(16, 8, 4, 2, 1)$	9.588	20.674 (0.155)	16.117 (0.104)	22.0 %
diag $(1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16)$	12.602	25.426 (0.170)	23.530 (0.155)	7.5 %
diag $(100, 100, 100, 100, 100)$	9.936	20.428 (0.376)	13.602 (0.128)	33.4 %
diag $(0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01)$	16.386	36.779 (0.542)	30.349 (0.394)	17.5 %
diag $(10^{10}, 5, 1, 1/5, 10^{-10})$	11.833	24.143 (0.172)	24.434 (0.179)	-1.2 %
diag $(10^{10}, 10^{-10}, 10^{-10}, 10^{-10}, 10^{-10})$	15.333	26.521 (0.194)	26.521 (0.194)	0.0 %
diag $(10^{10}, 10^{4}, 1, 10^{-4}, 10^{-10})$	12.666	25.933 (0.196)	26.277 (0.200)	-1.3 %