2006 年 7 月 4 日（今野）

数理トピックス II の練習問題

$\boxed{\text{演習問題 1}}$ 次の集合の組はが実数の切断の条件 (a) と (b) をみたしているかど うかを理由とともに述べよ．

(1) $A = \{x : x \in \mathbb{R}, x \leq 2\}$, $\qquad B = \{x; x \in \mathbb{R}, x > 2\}$

(2) $A = \{x : x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 2\}$, $\qquad B = \{x; x \in \mathbb{R}, x^2 > 2\}$

$\boxed{\text{実数の切断の定義}}$ 実数全体を $\mathbb{R}$ とし，$\mathbb{R}$ をつぎの条件をみたす 2 つの空でない集合 A, B にわかる．

(a) $\mathbb{R} = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$

(b) $a \in A$, $b \in B$ ならば，$a < b$

このとき，2 つの集合の組 (A, B) を実数 $\mathbb{R}$ の切断という．

$\boxed{\text{演習問題 2}}$

(1) 有理数の定義を述べよ．

(2) a と b が有理数のとき，$a + b$ も有理数であることを示せ．ただし，整数の足し算と掛け算の答えは整数であることは用いてよい．

(3) a, b を有理数とし，$a < b$ とする．このとき，$a < x < b$ をみたす有理数 x が存在することを示せ．

$\boxed{\text{演習問題 3}}$ つぎの集合が上に有界または下に有界かをのべよ．その場合には，上界と下界を述べよ．

(1) $X = \{x : x \leq 5\}$

(2) $A = \{a_n : a_n = (n+1)/n, n \in \mathbb{N}\}$

(3) 自然数全体 $\mathbb{N}$

(4) 整数全体 $\mathbb{Z}$

(5) $Y = \{\sin x :, x \in \mathbb{R}\}$

$\boxed{\text{下に有界と下界}}$ 実数 $\mathbb{R}$ の空でない部分集合 Y が下に有界であるとは，

$$Y \in \forall y \text{ について，} \exists k\,(y \geq k)$$

ときをいい，定数 k を集合 X の上界という．

$\boxed{\text{演習問題 4}}$ X を $\mathbb{R}$ の空でない部分集合とする．X の上界全体の集合を

$$B = \{b : b \in \mathbb{R}, b \quad \text{は } X \text{ の上界}\}$$

と[1]し，A を B の補集合とする．すなわち，

$$A = \{a : a \in \mathbb{R}, a \quad \text{は } X \text{ の上界ではない}\}$$

である．さらに，$a \in A$ と $b \in B$ とする．

[1] $b \in B$ ならば，すべての $x \in X$ に対して，$x \leq b$ となる．

(1) $a < b$ を示せ.
(2) 集合の組 $(A,\, B)$ は切断であるかどうかをのべよ．また，その理由も明記せよ.

$\boxed{\text{演習問題 4}}$ 以下の数列は単調増加，単調減少，有界な数列かをのべよ.
(1) $\{1 - 1/n\}_{n=1}^{\infty}$
(2) $\{(n^2 + 1)/n\}_{n=1}^{\infty}$
(3) $\{1 + (-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$
(4) $\{(-2)^n\}_{n=1}^{\infty}$

$\boxed{\text{演習問題 5}}$ 「任意の正の数 ϵ に対して，$|x - a| < \delta$ なら $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ となる δ が存在する」の否定を述べよ.

$\boxed{\text{演習問題 6}}$ 関数 $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} x & (x < 0), \\ x + 1 & (x \geq 0) \end{cases}$$

で定める．$V = (-1,\, 1)$ としたとき，$f(V) = \{y : y = f(x),\, x \in V\}$ を求めよ.

$\boxed{\text{演習問題 7}}$ $f(x) = 2x + 3$ とする．$x = a$ と任意の正の数 ϵ に対して，開区間 $V = (a - \delta,\, a + \delta)$ が

$$f(V) \subset (f(a) - \epsilon,\, f(a) + \epsilon) \tag{1}$$

となるように正の数 δ（必要ならば，a と ϵ に依存してよい）を定めたうえに，上の条件 (1) をみたしているかを示せ．ただし，$f(V) = \{y : y = f(x),\, x \in V\}$ である.

$\boxed{\text{演習問題 8}}$ $a_n = \dfrac{1}{n}$ としたとき，数例 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束することを $\epsilon - n_0$ 論法を用いて示せ.

$\boxed{\epsilon - n_0 \text{ 論法}}$ 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が α に収束するとは，数列 $\{a_n - \alpha\}_{n=1}^{\infty}$ が 0 に収束するときをいう．すなわち，$\forall \epsilon > 0$ に対して，

$$n > n_0 \quad \text{なら} \quad |a_n - \alpha| < \epsilon$$

となる番号 n_0 が存在するときをいう.

$\boxed{\text{アルキメデス性}}$ $a,\, b$ を 2 つの異なる実数とし，$0 < a < b$ とする．このとき，

$$b < na$$

なる自然数 n が存在する.

$\boxed{\text{演習問題 9}}$ デデキントの切断公理と同値の命題を述べよ.

$\boxed{\text{デデキントの切断公理 = 連続性の公理}}$ 実数の切断 $(A,\, B)$ は

(1) A に最大数があり，B に最小数がない.

または

$$(2)\ A \text{ に最大数がなく，} B \text{ に最小数がある．}$$

に限る．

$\boxed{\text{演習問題 10}}$ 有理数の切断 (A, B) に対して，以下の場合のどれがおこるかを答えよ．

(1) A に最大数があり，B に最小数がない．

(2) A に最大数がなく，B に最小数がある．

(3) A に最大数があり，B に最小数がある．

(4) A に最大数がなく，B に最小数がない．

おこる場合には，その例を述べよ．

$\boxed{\text{演習問題 11}}$ $y = 3x + 4$ が連続であることを $\epsilon - \delta$ 論法を用いて確認せよ．

$\boxed{\text{演習問題 12}}$ 閉区間の縮小列を具体的に構成し，その縮小列の共通部分によって定める実数を求めよ．

$\boxed{\text{演習問題 13}}$ 連続関数 $f(x)$ と a に対して，$\epsilon = f(a) > 0$ とおく．この ϵ に対して，

$$|x - a| < \delta \text{ なら } |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

とする．このとき，開区間 $(a - \delta, x + \delta)$ 上で

$$f(x) > 0$$

を示せ．

$\boxed{\text{演習問題 14}}$ 存在するならば，つぎの集合の上界，下界，上限，下限をのべよ．
(1) 自然数全体
(2) $\{x : x^2 < 4\}$
(3) $\{x : x < 3\}$
(4) $\{x : x \leq 3\}$

$\boxed{\text{演習問題 15}}$ 上に有界，下に有界，有界な集合の例をつくり，それぞれの上界，下界をみつけよ．

$\boxed{\text{演習問題 16}}$
(1) 関数 $f(x)$ が $x = a$ で連続であることを lim の記号を用いて述べよ．(高校流でよい)
(2) 関数 $f(x)$ が $x = a$ で連続であることを $\epsilon - \delta$ 論法を用いて述べよ．

$\boxed{\text{演習問題 17}}$ 数列 $\{a_n\}$ が a に収束することを $\epsilon - n_0$ 論法を用いて述べよ．

$\boxed{\text{演習問題 18}}$ 数列 $\{a_n\}$ は a に収束するが，数列 $\{f(a_n)\}$ は $f(a)$ に収束しないような関数 $f(x)$ をつくり，数列 $\{f(a_n)\}$ の極限と $f(a)$ を求めよ.（a も具体的に定める！）

$\boxed{\text{演習問題 19}}$ $f(x) = x^5 + 2x - 5$ について，以下の問いの答えよ.
(1) $y = f(x)$ は連続関数であることを示せ.
(2) 方程式 $f(x) = 0$ は $x = 1$ と $x = 2$ の間に実数解を持つことを示せ.

$\boxed{\text{用いてよいことその１}}$ $f(x), g(x)$ が連続のとき，つぎの関数は連続である.
(1) $f(x) \pm g(x)$
(2) $f(x) \cdot g(x)$

$\boxed{\text{用いてよいことその２ (中間地の定理)}}$ 連続関数 $y = f(x)$ で $f(a) < 0, f(b) > 0\,(a < b)$ となるとき，

$$f(c) = 0$$

となる c が少なくとも 1 つ存在する.

$\boxed{\text{演習問題 20}}$ $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は数列とし，a と b は実数とする．任意の $\epsilon > 0$ に対して，ある番号 n_1 と n_2 が存在して，

$$n > n_1 \text{ なら } |a_n - a| < \tfrac{\epsilon}{2}$$

かつ

$$n > n_2 \text{ なら } |b_n - b| < \tfrac{\epsilon}{2}$$

とする．このとき，

$$n > n_0 \text{ なら } |a_n + b_n - (a + b)| < \epsilon$$

が成り立つ番号 n_0 が存在（番号 n_0 を n_1 と n_2 を用いて定める）することを示せ.

2006 年 7 月 4 日（今野）

数理トピックス II の練習問題の解説

$\boxed{\text{演習問題 1}}$　教科書 page 47 を参照.

$\boxed{\text{演習問題 2}}$　(1) 整数 m, n について，$\dfrac{m}{n}$ かつ $n \neq 0$ の形で表される数. (2) $a = \dfrac{m_1}{n_1}$，$b = \dfrac{m_2}{n_2}$ とおく．ただし，$m_1, m_2, n_1 \neq 0, n_2 \neq 0$ は整数とする．このとき，$a + b = \dfrac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{n_1 n_2}$ となる．$n_1 \neq 0$ かつ $n_2 \neq 0$ より，$n_1 n_2 \neq 0$ は整数となる．一方，$m_1 n_2 + m_2 n_1$ も整数となり，$a + b$ は有理数であることがわかる．(3) $x = \dfrac{a+b}{2}$ とおく．すると $x - a > 0$ かつ $b - x > 0$ となる．さらに，$\dfrac{a+b}{2}$ が有理数であることは (2) と同様に示すことができる.

$\boxed{\text{演習問題 3}}$　教科書 page 52 を参照.

$\boxed{\text{演習問題 4}}$　(1) a は X の上界ではないので，ある $x_0 \in X$ が存在して，$a < x_0$ となる．一方，$b \in B$ から b は X の上界なので，任意の $x \in X$ に対して，$x \leq b$ となる．大小関係の推移律より $a < x_0 \leq b$ となり，$a < b$ がわかる．(2) 定義より $A \cup B = \mathbb{R}$ かつ $A \cap B = \emptyset$ となる．(1) とあわせると (A, B) は実数の切断となる.

$\boxed{\text{演習問題 5}}$　教科書 page 96 を参照.

$\boxed{\text{演習問題 6}}$　$f(V) = (-1.0) \cup [1, -2)$.

$\boxed{\text{演習問題 7}}$　教科書 page 93 を参照.

$\boxed{\text{演習問題 8}}$　教科書 page 58 を参照.

$\boxed{\text{演習問題 9}}$　教科書 page 73 を参照.

$\boxed{\text{演習問題 10}}$　(1) おこる．(2) おこる．(3) おきない.（教科書 page 48 を参照）(4) おこる.（教科書 page 49 を参照）

$\boxed{\text{演習問題 11}}$　教科書 page 93 を参照.

$\boxed{\text{演習問題 12}}$　教科書 page 68 を参照.

$\boxed{\text{演習問題 13}}$　$|x - a| < \delta \Longleftrightarrow -\delta < x - a < \delta \Longleftrightarrow a - \delta < x < a + \delta$ とから $x \in (a - \delta, a + \delta)$ に対して，$|f(x) - f(a)| < \epsilon \Longleftrightarrow -\epsilon < f(x) - f(a) < \epsilon \Longleftrightarrow 0 = f(a) - \epsilon < f(x) < f(a)$ となる.

$\boxed{\text{演習問題 14}}$　(1) 上界は存在しない．下限は 1．(2) 上限は 2，下限は -2．(3) 下界は存在しない．上限は 3．(4) 下界は存在しない．上限は 3.

$\boxed{\text{演習問題 15}}$　教科書 page 52 を参照.

$\boxed{\text{演習問題 16}}$　教科書 page 91 を参照.

$\boxed{\text{演習問題 17}}$　教科書 page 58 を参照.

$\boxed{\text{演習問題 18}}$　たとえば，つぎの例をかんがえればよい．演習問題 6 の関数において，$a_n = -1/n$ とする．このとき，a_n は 0 に収束する．しかし，$f(a_n) \to 0 \neq f(0) = 1$ となる.

$\boxed{\text{演習問題 19}}$　(1) $y = x$ は連続なので，$f(x)$ も連続．(2) $f(1) = -2$ かつ $f(2) = 31$ より，中間値の定理を用いればよい.

$\boxed{\text{演習問題 20}}$　$n_0 = \max(n_1, n_2)$ とおくと $n > n_0$ に対し，$|a_n - a| < \dfrac{\epsilon}{2}$ かつ $n > n_0$ に対し，$|b_n - a| < \dfrac{\epsilon}{2}$ となるので，$n > n_0$ に対し，$|a_n + b_n - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| = \epsilon$ がわかる.