

数理トピックス II の練習問題の解説

演習問題 1 教科書 page 47 を参照 .

演習問題 2 (1) 整数 m, n について, $\frac{m}{n}$ かつ $n \neq 0$ の形で表される数 . (2) $a = \frac{m_1}{n_1}, b = \frac{m_2}{n_2}$ とおく . ただし, $m_1, m_2, n_1 \neq 0, n_2 \neq 0$ は整数とする . このとき, $a + b = \frac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{n_1 n_2}$ となる . $n_1 \neq 0$ かつ $n_2 \neq 0$ より, $n_1 n_2 \neq 0$ は整数となる . 一方, $m_1 n_2 + m_2 n_1$ も整数となり, $a + b$ は有理数であることがわかる . (3) $x = \frac{a+b}{2}$ とおく . すると $x - a > 0$ かつ $b - x > 0$ となる . さらに, $\frac{a+b}{2}$ が有理数であることは (2) と同様に示すことができる .

演習問題 3 教科書 page 52 を参照 .

演習問題 4 (1) a は X の上界ではないので, ある $x_0 \in X$ が存在して, $a < x_0$ となる . 一方, $b \in B$ から b は X の上界なので, 任意の $x \in X$ に対して, $x \leq b$ となる . 大小関係の推移律より $a < x_0 \leq b$ となり, $a < b$ がわかる . (2) 定義より $A \cup B = \mathbb{R}$ かつ $A \cap B = \emptyset$ となる . (1) とあわせると (A, B) は実数の切断となる .

演習問題 5 教科書 page 96 を参照 .

演習問題 6 $f(V) = (-1, 0) \cup [1, 2)$.

演習問題 7 教科書 page 93 を参照 .

演習問題 8 教科書 page 58 を参照 .

演習問題 9 教科書 page 73 を参照 .

演習問題 10 (1) おこる . (2) おこる . (3) おきない (教科書 page 48 を参照) (4) おこる (教科書 page 49 を参照)

演習問題 11 教科書 page 93 を参照 .

演習問題 12 教科書 page 68 を参照 .

演習問題 13 $|x - a| < \delta \iff -\delta < x - a < \delta \iff a - \delta < x < a + \delta$ とから $x \in (a - \delta, a + \delta)$ に対して, $|f(x) - f(a)| < \epsilon \iff -\epsilon < f(x) - f(a) < \epsilon \iff 0 = f(a) - \epsilon < f(x) < f(a) + \epsilon$ となる .

演習問題 14 (1) 上界は存在しない . 下限は 1 . (2) 上限は 2, 下限は -2 . (3) 下界は存在しない . 上限は 3 . (4) 下界は存在しない . 上限は 3 .

演習問題 15 教科書 page 52 を参照 .

演習問題 16 教科書 page 91 を参照 .

演習問題 17 教科書 page 58 を参照 .

演習問題 18 たとえば, つぎの例をかながえればよい . 演習問題 6 の関数において, $a_n = -1/n$ とする . このとき, a_n は 0 に収束する . しかし, $f(a_n) \rightarrow 0 \neq f(0) = 1$ となる .

演習問題 19 (1) $y = x$ は連続なので, $f(x)$ も連続 . (2) $f(1) = -2$ かつ $f(2) = 31$ より, 中間値の定理を用いればよい .

演習問題 20 $n_0 = \max(n_1, n_2)$ とおくと $n > n_0$ に対し, $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ かつ $n > n_0$ に対し, $|b_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ となるので, $n > n_0$ に対し, $|a_n + b_n - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| = \epsilon$ がわかる .

重要な項目 連続関数の定義 ($\epsilon - \delta$ 論法), 数列の極限 ($\epsilon - n_0$ 論法), デデキントの切断公理とその同値条件, 単調数列, 有界数列, 上界 (下界) と上限 (下限), 高校で学んだ集合の内容, 中間値の定理, 有理数の定義, 関数の定義域と値域, 不等号の性質, 交換律, 分配律, 結合律 (たし算とかけ算)