第2章　金利を理解する

2.1　はじめに

預金資産は

- 資産価値の間の裁定関係を理解するうえで重要な役割をはたす.
- 元本保証かつ金利によって元利が時間ともに増加するので，他の金融資産の比較対象の基準となる.
- 預金の価値プロセス — 預金の価値の時間的変化.
  - 金融工学では，分析の枠組みの中で最短期の金利を利用.

基本時間単位表示

- h を基本時間単位とする．たとえば，h が秒であれば，

  $$h = \frac{1}{365 \times 24 \times 60 \times \times 60}\text{年}$$

  となる.
- 現時点から時間幅 h で，未来の時点を

  $$n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots\, ,\, N$$

  を表示する.
- 最終時点 N は投資時間 T あるいは満期時間 T に対応した時点で 0 時点からみて

  $$T = Nh\,\text{年}$$

  を意味する.

2.2　預金金利の期間構造

金利の期間構造

- 預金期間と金利を組で考える.

- 預金期間の違いによる利率の違いの構造を金利の期間構造という．
- 時点 n における預金期間 s の利率 (年率表示の利率) を

$$r_n(s) \qquad n = 0, 1, \ldots, N; s \geq 0$$

を記すことにする．ここで，前節の約束から時点 n は時間のきざみが決めてあるので，nh 年後に対応し，s は年表示の預金期間とし，たとえば，$r_n(0.25) = 0.032$ はある時点 n 時点の 3 ヶ月物定期預金利率を示す．したがって，元本 A 円の 3 ヶ月後の価値 $V_n(0.25 : 0.032)$ は

$$V_n(0.25 : 0.032) = A \times (1 + 0.25 \times r_n(0.25)) = A \times (1 + 0.25 \times 0.032) = 1.008 \times A$$

となる．また，$r_n(1.5) = 0.038$ の場合，元本 A 円の 1 ヶ月後の価値 $V_n(1.5 : 0.038)$ は

$$V_n(0.5 : 0.038) = A \times (1 + r_n(1.5))^{1.5} = A \times (1 + 0.038)^{1.5} = 1.057538 \times A$$

となる．

実際の世界の元利合計計算法

n 時点での元本 A を s 年物定期で運用したときの s 年後の元利合計 $V_n(s : r_n(s))$ は

$$V_n(s : r_n(s)) = \begin{cases} A(1 + r_n(s))^s & s \geq 1, \\ A(1 + s \times r_n(s)) & s < 1 \end{cases}$$

である．

注意

たとえ，0 時点で $r_0(s) = r_0(s/2) = \bar{r}_0\,(s \geq 1)$ であっても，s 年物定期で s 年運用するのと $s/2$ 年物定期で自動更新をして s 年運用するのとでは s 年後の元利合計は一般には異なることに注意する．

簡単のために $h = 1/12$ とする．すなわち，時間きざみを 1 ヶ月である．このときに，2 年物定期で 2 年間運用すれば，2 年後の元利合計は

$$V_0(2 : \bar{r}_0) = (1 + \bar{r}_0)^2$$

と確定する．しかし，1 年物定期で 2 年間運用するときには，1 年後の 1 年物定期の利率は不明なので，その利率は確率変数と考えて $\tilde{r}_{12}(1)$ とかけば，2 年後の元利合計は

$$(1 + \bar{r}_0) \times (1 + \tilde{r}_{12}(1))$$

となり，0 時点では上の元利合計は確定しておらず，将来の時点で実現する確率変数と考える．

2.3 連続複利

現時点を 0 とし，$h = 1/12$ とする．1 年未満の定期預金を考える．A 円を 3 ヶ月物定期預金で 3 ヶ月運用すれば，3 ヶ月後の元利合計は

$$A\left(1 + 0.25 \times r_0(0.25)\right)$$

となる．また，A 円を 3 ヶ月物定期預金で 1 年間運用すれば，1 年後の元利合計は

$$A \times (1 + r_0(0.25)) \times (1 + \tilde{r}_3(0.25)) \times (1 + \tilde{r}_6(0.25)) \times (1 + \tilde{r}_9(0.25))$$

であり，将来の時点で実現する確率変数と考える．もし，

$$r_0(0.25) = \tilde{r}_3(0.25) = \tilde{r}_6(0.25) = \tilde{r}_9(0.25)$$

は一定と仮定できるならば，A 円を 3 ヶ月物定期預金で 1 年間運用すれば，1 年後の元利合計は

$$A \times (1 + 0.25 r_0(0.25))^4$$

となり，0 時点で確定する．さらに，定期の期間に関しても一定

$$r = r_0(s), \qquad s \geq 0$$

であれば，3 ヶ月もので 1 年間運用した場合と 6 ヶ月もので 1 年間運用した場合，1 年物 1 年間運用した場合の違いは

$$(1 + 0.25r)^4 > (1 + 0.5r)^2 > 1 + r$$

となる．たとえば，$r = 0.04$ とすれば，

$$(1 + 0.25r)^4 = (1.01)^4 = 1.040604$$

となる．したがって，3 ヶ月ものの利回り[1] は 4.0604% となる．

<u>微小時間利回り</u>

h を時間刻みととする．$r_n(h)$ が時点 n に関して一定ならば，

$$r = r_0(h) = \tilde{r}_1(h) = \tilde{r}_2(h) = \cdots = \tilde{r}_n(h)$$

と仮定する．このとき，預金期間が h の預金で 1 年間運用すれば，利回りは

$$\frac{A(1 + hr)^{1/h} - A}{A} = (1 + hr)^{1/h} - 1$$

となる．さらに，預金期間が h の預金で $t = nh$ 年間運用すれば，元利合計は

$$A(1 + hr)^{t/h} = A(1 + hr)^n$$

[1] 利回り $= \frac{\text{元利合計} - \text{元本}}{\text{元本}}$ である．

となる．すなわち，単位時間金利が時間的に一定で $r(h)$ ならば，0 時点の 1 円は $t = nh$ 年後に

$$B_n(h) = (1 + hr(h))^n \tag{2.1}$$

となる．

一方，利率 $r_0(1)$ の　1 年物定期ので 1 円を 1 年間運用すれば，

$$V_0(1:\ r_0(1)) = 1 + r_0(1)$$

となる．これより

$$1 + r_0(1) = (1 + hr(h))^{1/h}$$

が成立する．さもなけらば，確実に 1 年後に利益を得られる方法が存在することになる．

同様にすれば，0 時点で決まっている $s\,(h < s < 1)$ 年物金利 $r_0(s)$ と時間不変と仮定した h 年物金利 $r(h)$ との間には，

$$1 + sr_0(s) = (1 + hr(h))^{s/h}$$

という関係しきが成立し，$s > 1$ に対しては

$$(1 + r_o(s))^s = (1 + hr_0(h))^{s/h}$$

という関係が成立する．これらをまとめると

裁定関係

$$\boxed{(1 + hr(h))^{s/h} = \begin{cases} 1 + sr_0(s) & h < s < 1, \\ (1 + r_0(s))^s & s \geq 1 \end{cases}}$$

$h \to 0$ のとき，$r(h) \to r(0)$ ならば，

$$\lim_{h \to 0} (1 + hr(h))^{1/h} = e^{r(0)}$$

となる．ただし，$e \approx 2.71828$ である．$r(0)$ は微小時間の金利とあると仮定（理論上のもの）し，**瞬間的スポット・レート**とよぶことにする．(2.1) の式で $t = nh$ を固定して，$h \to 0$（したがって，$n \to \infty$）とすると

$$\lim_{h \to 0} B_n(h) = (1 + hr(h))^n = \left[\lim_{h \to 0} (1 + hr(h))^{1/h}\right]^t = \exp(r(0)t)$$

となる．

瞬間スポット・レート $r(0)$ が時間的に一定ならば 0 時点の 1 円は t 年後に

$$C_t = \exp(r(0)t)$$

$t = nh$ に対して,

$$B_n = \exp(r(0)nh)$$

と記すことにする.

つぎに，単位時間金利の連続複利表現を求める．単位時間金利がの時間的な不変性を仮定する．このとき，$t = nh$ 年間 h 年物で連続的に有用すれば，0 時点の 1 円は nh 年後には

$$B_n(h) = (1 + hr(h))^n$$

となる．一方，スポット・レート r^* で nh 年間運用すれば，0 時点の 1 円は nh 年後には

$$\exp(nhr^*)$$

となる．裁定関係より

$$(1 + hr(h))^n = \exp(nhr^*)$$

となり,

$$r^* = \frac{1}{nh}\log B_n(h) = \frac{1}{h}\log(1 + hr(h)) \tag{2.2}$$

となる．したがって，単位時間金利 $r(h)$ が時間的に不変のとき，(2.2) で定義される r^* よる預金プロセス

$$B_n^* = \exp(r^*nh)$$

を得る．r^* を単位時間スポット・レートとよぶことにする．

これより n 時点での 1 円は 0 時点では

$$D_0(nh) = \exp(-r^*nh)$$

となる．