第5章　補遺

5.1　確率変数とは

それがとる値 (とる値の範囲) に対しそれぞれ確率が与えれる変数である．確率変数には，離散型確率変数と連続型確率変数がある．

離散型確率変数

1. 一般に，可算集合 $\{x_1, x_2, \ldots,\}$ の中に値を取る確率変数 X を離散型確率変数とよぶ．それぞれの値の確率
$$P(X = x_i) = p_i, i = 1, 2, \ldots$$
を確率変数 X の確率分布という．である．ここで，
$$p_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$$
である．
2. 例〔さいころ〕: さいころをふって出る目に対応する確率変数を X とする．さいころが正しいならば，
$$\begin{aligned} P(X=1) &= \frac{1}{6}, P(X=2) = \frac{1}{6}, P(X=3) = \frac{1}{6}, P(X=4) = \frac{1}{6}, \\ P(X=5) &= \frac{1}{6}, P(X=6) = \frac{1}{6}, \end{aligned}$$
である．これを表にまとめたもの

X の値	1	2	3	4	5	6	合計
確率	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1

を確率分布表という．
3. 例（コインを3回投げる）: コインを3回投げたとき，3回中に表の出た回数に対応する確率変数を X とする．コインが正しいならば，
$$P(X=0) = \frac{1}{8}, P(X=1) = \frac{3}{8}, P(X=2) = \frac{3}{8}, P(X=3) = \frac{1}{8},$$
となる．

X の値	0	1	2	3	合計
確率	1 / 8	3 / 8	3 / 8	1 / 8	1

4. 例（さいころを 2 回投げる）: さいころを 2 回投げたとき，ふたつのさいころの目の和に対応する確率変数を X とする．このとき，

和	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	合計
確率	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

となる．たとえば，$P(X=4)$ の確率は

$$\begin{aligned} P(X=4) &= P\{(1,3),(2,2),(3,1)\} = P\{(1,3)\} + P\{(2,2)\} + P\{(3,1)\} \\ &= \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{3}{36} \end{aligned}$$

よりわかる．

連続型確率変数

1. $P(X=x)=0$ となり，確率変数 X の取る値が関数 $f(x)$ によって

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

とあらわされる場合，X は連続型確率変数といい，その分布を連続型という．また，$f(x)$ のことを確率変数 X の確率密度関数という．ただし，

$$\text{すべての } x \text{ に対して} \quad f(x) \geq 0, \quad \text{かつ} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

となる．
ここで，Δx を極めて小さい数とすれば，

$$P(x < X \leq x + \Delta x) \approx f(x)\Delta x$$

である．

2. 例（指数分布）: $\lambda > 0$ として，

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

電球が切れるまでの時間〔故障時間）に対応する確率変数 X の確率分布とし利用される．

3. 例（一様分布）:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leq x \leq 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

累積分布関数

1. 定義

$$F(x) = P(X \le x)$$

2. 離散型分布

$$F(x) = \sum u \le xp(u)$$

3. 連続型分布

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$$

4. 性質

(a) 広義単調増加

$$x_1 < x_2 \qquad \text{ならば} \qquad F(x_1) \le F(x_2)$$

(b) 範囲

$$\lim_{x \to \infty} F(x) = 1, \qquad \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$

(c) 右側連続

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} F(x+\epsilon) = F(x), \qquad \text{各 } x \text{ に対して}$$

モードとメディアン

モードとは確率（密度）関数 $f(x)$ を最大にする点である．メディアンは $P(X \le m) \ge 1/2$ と $P(X \ge m) \ge 1/2$ をみたす点である．例で与えられた確率分布について，累積分布関数をもとめ，そのグラフを描け．

問題 6　連続型確率変数 X の確率密度関数は

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 \le x \le 2, \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

で与えれれるとする．

(i)　累積分布関数 $F(x)$ を求め，そのグラフを描け．

(ii)　メディアンを求めよ．すなわち，$F(m) = 1/2$ をみたす点を求めること．

問題 7　離散型確率変数 X の確率関数は

$$P(X=0) = \frac{1}{8},\ P(X=1) = \frac{3}{8},\ P(X=2) = \frac{3}{8},\ P(X=3) = \frac{1}{8},$$

で与えられるとする．このとき，X の累積分布関数を求め，そのグラフを描け．

5.2 期待値とは

確率変数 X に対して，それがとる値の重み付き平均である．これを $E(X)$ と記す.

$$
\begin{array}{lcll}
E(X) & = & \sum_x xf(x) & \text{〔離散型〕} \\
E(X) & = & \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx & \text{〔連続型〕}
\end{array}
$$

期待値はひとつの定数である．無限和，積分であるから，存在しないこともある.

X の関数 $\phi(X)$ についても期待値が定義できる.

$$
\begin{array}{lcll}
E(\phi(X)) & = & \sum_x \phi(x)f(x) & \text{〔離散型〕} \\
E(\phi(X)) & = & \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)f(x)\,dx & \text{〔連続型〕}
\end{array}
$$

例〔さいころ〕

さいころをふって出る目に対応する確率変数を X の期待値を求めよう．確率分布は

X の値	1	2	3	4	5	6	合計
確率	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1 / 6	1

であった．したがって,

$$
E(X) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}
$$

となる.

例（宝くじの期待値）

等級	当せん金	本数
１等	２億円	１４６本
１等の前後賞	５千万円	２９２本
１等の組み違い賞	十万円	１万４４５４本
２等	１千万円	２９２本
３等	百万円	２９２０本
４等	５万円	３６万５千本
５等	１万円	１４６万本
６等	３百円	７３００万本

この宝くじは１枚３００円で７億３千万枚発売された．したがって，その期待値は

$$
\begin{aligned}
&(2 \times 10^8) \cdot \frac{146}{73 \times 10^7} + (5 \times 10^7) \cdot \frac{292}{73 \times 10^7} + (1 \times 10^5) \cdot \frac{14454}{73 \times 10^7} \\
&+(1 \times 10^7) \cdot \frac{146}{73 \times 10^7} + (1 \times 10^6) \cdot \frac{2920}{73 \times 10^7} + (5 \times 10^4) \cdot \frac{365 \times 10^3}{73 \times 10^7} \\
&+(1 \times 10^4) \cdot \frac{146 \times 10^4}{73 \times 10^7} + (3 \times 10^3) \cdot \frac{73 \times 10^6}{73 \times 10^7} \doteqdot 145
\end{aligned}
$$

となる．

例（指数分布）　確率変数 X の確率密度関数が

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}, \qquad \lambda > 0$$

で与えらるときの X の期待値を求めよう．

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_0^{\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x}\,dx \\ &= \left[-x e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

となる．

例（一様分布）　確率変数 X が一様分布

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leq x \leq 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

に従うとする．このとき，X の期待値と X^2 の期待値を求めよう．

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_0^1 x \cdot 1\,dx = \frac{1}{2} \\ E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_0^1 x^2 \cdot 1\,dx = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

期待値の性質

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & E(c) & = c \\ \text{(b)} & E(X + c) & = E(X) + c \\ \text{(c)} & E(cX) & = c\,E(X) \\ \text{(d)} & E(X + Y) & = E(X) + E(Y) \quad \text{（期待値の加法性）} \end{array}$$

例（さいころを 2 回投げる）　さいころを 2 回投げたとき，ふたつのさいころの目の和に対応する確率変数を X とする．このとき，確率分布表は

和	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	合計
確率	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

とあった．直接，X の期待値を求めることはできる：

$$\begin{aligned} E(X) &= 2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{2}{36} + 4 \times \frac{3}{36} + 5 \times \frac{4}{36} + 6 \times \frac{5}{36} + 7 \times \frac{6}{36} + 8 \times \frac{5}{36} \\ &\quad + 9 \times \frac{4}{36} + 10 \times \frac{3}{36} + 11 \times \frac{2}{36} + 12 \times \frac{1}{36} \\ &= \frac{252}{6} = 7 \end{aligned}$$

しかし，2 個のさいころの目に対応する確率変数を X_1 と X_2 とすれば，$X = X_1 + X_2$ となるので，性質 (d) ととなる．されに，$E(X_1) = 7/2$ と $E(X_2) = 7/2$ を利用すれば，

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = 7$$

を得る．

分散と標準偏差

確率変数 X の期待値 $E(X)$ に X がどれだけ集中しているかを測る指標として，X の分散を

$$V(X) = E[(X - E(X))^2]$$

で定義する．また，標準偏差を $\sqrt{V(X)}$ と定義する．期待値の定義から

$$\begin{aligned} V(X) &= \textstyle\sum_x (x - E(X))^2 f(x) && \text{（離散型）} \\ V(X) &= \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x)\, dx && \text{（連続型）} \end{aligned}$$

となる．$V(X) \geq 0$ であることに注意せよ．また，

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2 - 2XE(X) + (E(X))^2) = E(X^2) - 2E(X)E(X) + (E(X))^2 \\ &= E(X^2) - (E(X))^2 \end{aligned}$$

と書きかえることができる．

分散の性質

$$\begin{array}{lllll} \text{(a)} & V(c) & = & 0 \\ \text{(b)} & V(X+c) & = & V(X) \\ \text{(c)} & V(cX) & = & c^2 V(X) \\ \text{(d)} & V(X) & \geq & 0 \end{array}$$

例（さいころ）

X を 1 個のさいころをふったときの目，Y を 2 個のさいころをふったときの目に対応する確率変数 X_1 と X_2 のふたつの目の平均に対応する確率変数とする．すなわち，$Y = (X_1 + X_2)/2$ である．このとき，

$$E(X_1) = \frac{7}{2}, \qquad E(Y) = \frac{1}{2}E(X_1) + \frac{1}{2}E(X_2) = \frac{7}{2}$$

である．しかし，Y のほうがその期待値に集中している．まず，X_1 の分散を求める：

$$E(X_1^2) = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{91}{6}$$

より

$$V(X_1) = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$$

となる．つぎに，Y の分散を求める：

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= 1^2 \cdot \frac{1}{36} + (3/2)^2 \cdot \frac{2}{36} + 2^2 \cdot \frac{3}{36} + (5/2)^2 \cdot \frac{4}{36} + 3^2 \cdot \frac{5}{36} + (7/2)^2 \cdot \frac{6}{36} \\ &\quad +4^2 \cdot \frac{5}{36} + (9/2)^2 \cdot \frac{4}{36} + 5^2 \cdot \frac{3}{36} + (11/2)^2 \cdot \frac{2}{36} + 6^2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{329}{24} \end{aligned}$$

から

$$V(Y) = \frac{329}{24} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{24}$$

となり，$V(Y) < V(X)$ となる．

例（一様分布の分散）

確率変数 X が一様分布

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (0 \le x \le 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

に従うとする．このとき，

$$E(X) = \frac{1}{2} \qquad E(X^2) == \frac{1}{3}$$

であった．したがって，

$$V(X) = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}$$

となる．

標準化変換

$$Z = \frac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}}$$

とおく．すると，期待値と分散の性質から

$$\begin{aligned} E(Z) &= \frac{1}{\sqrt{V(X)}} E(X - E(X)) = 0 \\ V(Z) &= \left(\frac{1}{\sqrt{V(X)}}\right)^2 V(X - E(X)) = \frac{1}{V(X)} V(X) = 1 \end{aligned}$$

問題 8　コインを 3 回投げる実験．3 回中に表の出た回数に対応する確率変数を X の確率分布表は

X の値	0	1	2	3	合計
確率	1 / 8	3 / 8	3 / 8	1 / 8	1

であった．

(i)　X の期待値を求めよ．

(ii)　X の分散を求めよ．

5.3 二項分布と正規分布

$$\text{確率分布} \quad \begin{cases} \text{離散型分布} & -- \quad \text{ベルヌーイ分布・二項分布・ポアソン分布} \\ \text{連続型分布} & -- \quad \text{一様分布・正規分布・指数分布・ワイブル分布} \end{cases}$$

ベルヌーイ試行と二項分布

2 種類の可能な結果（それぞれを S と F と呼ぼう）を生じる実験で，それぞれの結果が起こる確率が p と $1-p$ とし，この実験を同じ条件でかつ独立に n 回繰り返すことを考える．これをベルヌーイ試行という．

X：n 回中 S が x 回，F が $n-x$ 回生じるとすれば，その確率は

$$P(X=x) = f(x) = {}_nC_x p^x (1-p)^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

となる．ただし，0! =! とする．この分布を 2 項分布といい，$Bi(n,p)$ と書き，特に $Bi(1,p)$ をベルヌーイ分布とよぶ.

2 項分布の性質

- $\sum_{x=0}^{n} {}_nC_p p^x (1-p)^{n-x} = 1$
- $E(X) = \sum_{x=0}^{n} {}_nC_p x p^x (1-p)^{n-x} = np$
- $V(X) = \sum_{x=0}^{n} {}_nC_p (x-np)^2 p^x (1-p)^{n-x} = np(1-p)$

ポアソン分布

X が確率関数

$$f(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

を持つとき，X はポアソン分布に従うという．ただし，$\lambda > 0$ である．

ポアソンの性質

- $\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = 1$
- $E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \lambda$
- $V(X) = \sum_{x=0}^{\infty} (x-\lambda)^2 \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \lambda$

正規分布

正規分布の密度関数は

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{ -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\}, \qquad -\infty < x < \infty$$

正規分布の性質

- $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}dx = \mu$
- $V(X) = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}dx = \sigma^2$
- X が正規分布 $N(\mu,\,\sigma^2)$ に従うとき，その線形変換 $Y = aX+b$ は正規分布 $N(a\mu+b,\,a^2\sigma^2)$ に従う．
- $Z = (X-\mu)/\sigma$ は $N(0,\,1)$ に従う．

$$
\begin{aligned}
P(-1 < Z \le 1) &= \Phi(1) - \Phi(-1) &= 0.6827 \\
P(-2 < Z \le 2) &= \Phi(2) - \Phi(-2) &= 0.9545 \\
P(-3 < Z \le 3) &= \Phi(3) - \Phi(-3) &= 0.9973
\end{aligned}
$$

ただし，$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-s^2/2}\,ds$

指数分布

確率密度関数

$$
f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & (x \ge 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}, \qquad \lambda > 0
$$

で定義される分布

指数分布の性質

- $E(X) = \int_{0}^{\infty} xf(x)\,dx = \frac{1}{\lambda}$
- $V(X) = \int_{0}^{\infty}(x-\lambda)^2 f(x)\,dx = \frac{1}{\lambda^2}$

ワイブル分布

確率密度関数

$$
f(x) = \begin{cases} (bx^{b-1}/a^b)\exp(-(x/a)^b) & (x \ge 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}, \qquad \lambda > 0
$$

で定義される分布

ワイブルの性質

- $E(X) = \int_{0}^{\infty} xf(x)\,dx = a\Gamma(1+(1/b))$
- $V(X) = \int_{0}^{\infty}(x-a\Gamma(1+(1/b)))^2 f(x)\,dx = a^2\{(\Gamma(2+(1/b)) - (\Gamma(1+(1/b)))^2\}$

$\boxed{\text{問題 9}}$ X は $Bi(4, 1/2)$ に従うとする.

(i) X の確率分布表を求めよ.

(ii) X の期待値と分散を定義に従い求め，期待値と分散の公式で求めたものと一致することを確認せよ.

$\boxed{\text{問題 10}}$ X が $N(100, 15^2)$ に従うとき，つぎの確率を求めよ.

(i) $P(100 \le X \le 127)$

(ii) $P(X \le 118)$

(iii) $P(X > 76)$

(iv) $P(85 \le X \le 112)$

5.4　2 次元確率分布

5.4.1　離散型確率変数の同時確率分布

X と Y を離散型確率変数とする．

$$P(X = x, Y = y) = f(x, y)$$

を 2 次元確率変数 (X, Y) の同時確率分布という．

性質

1. $$f(x, y) \geq 0, \qquad \sum_x \sum_y f(x, y) = 1$$
2. 2 次元空間の中にある事象とは (x, y) の集まった部分集合である．事象 A に対して
$$P\{(X, Y) \in A\} = \sum \sum_{(x, y) \in A} f(x, y)$$

離散型の周辺分布

X と Y の周辺確率分布を

$$g(x) = \sum_y f(x, y), \qquad h(y) = \sum_x f(x, y)$$

で定義する．

連続型確率変数の同時確率分布

X と Y を連続型確率変数とする．$f(x, y)$ は 2 次元の同時確率密度関数とする．

性質

1. $$f(x, y) \geq 0, \qquad \int \int_S f(x, y)\, dx\, dy = 1$$
ただし，S は標本空間である．
2. 2 次元空間の中にある事象とは (x, y) の集まった部分集合である．事象 A に対して
$$P\{(X, Y) \in A\} = \int \int_{(x, y) \in A} f(x, y)\, dx\, dy$$

5.4.2 連続型確率変数の周辺分布

X と Y の周辺確率分布を

$$g(x) = \int f(x, y)\, dy, \qquad h(y) = \int f(x, y)\, dx$$

で定義する．

$\boxed{X \text{ と } Y \text{ の共分散}}$

$$COV[X, Y] = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)], \qquad \text{ただし} \quad \mu_X = E[X], \mu_Y = E[Y]$$

で定義する．すると

$$V[X + Y] = V[X] + V[Y] + 2\,COV[X, Y]$$

$\boxed{X \text{ と } Y \text{ の相関係数}}$

$$\rho_{X,Y} = \frac{COV[X, Y]}{\sqrt{V[X]}\sqrt{V[Y]}}$$

$\boxed{\text{相関係数の性質}}$

1. $$-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$$
2. X と Y は無相関 $\Longleftrightarrow \rho_{X,Y} = 0$ （すなわち，$COV[X, Y] = 0$ ）

$\boxed{\text{独立な確率変数}}$

X と Y の同時確率分布において，あらゆる x, y について

$$f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$$

が成立するならば，X と Y は互いに独立であるという．ただし，$f(x, y)$ は X と Y の同時確率（密度）関数であり，$g(x)$ と $h(y)$ は X と Y の周辺確率（密度）関数である．

$\boxed{\text{性質}}$

1. $E(XY) = E(X)E(Y)$
2. 独立 $\Rightarrow$ 無相関．なぜならば，$COV(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$
3. $V(X \pm Y) = V(X) + V(Y)$

$\boxed{n \text{ 個の確率変数の独立性}}$

n 個の確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ が独立であるとは，あらゆる $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に対して

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_1(x_1) f_2(x_2) \times \cdots \times f_n(x_n)$$

が成立することである．ただし，$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ は $X_1, X_2, \ldots, X_n$ の同時確率（密度）関数であり，$f_i(x_i), i = 1, 2, \ldots, n,$ は X_i の周辺確率（密度）関数である．この場合，ふたつの確率変数 X_k と $X_l\,(1 \le k \neq l \le n)$ は独立である．