第3章　無裁定価格理論：1 期間モデル

3.1　オプション

オプションとは，株式のような対象資産（原資産や基礎証券と呼ばれる）を一定の価値（行使価格）で売買できる権利を与える証券のことをいう．

- コールとプットオプション
  - コールオプション — 買う権利を与えること
  - プットオプション — 売る権利を与えること
- いつ行使できるかきるかで
  - ヨーロピアン・タイプ — 満期時点のみで権利を行使できる
  - アメリカン・タイプ — 満期時点までの任意の時点で権利を行使できる

以下では，ヨーロピアン・タイプを考えることにする．

ペイオフとはオプション契約が満期時点にもたらす収入のことをいう．また，ペイオフを満期時点の原資産価値の関数で表現したものをオプションの**ペイオフ関数**という．

コール・オプションの満期時点を N 時点，行使価格を K 円とし，N 時点の原資産価値を S_N とし，コール・オプションの N 時点での価値を C_N と書くと，コール・オプションのペイオフは

$$C_N = \max(S_N - K, 0) = \begin{cases} S_N - K & (S_N \geq K \text{ のとき}), \\ 0 & (S_N < K \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる．

また，N 時点のプット・オプションの価値を P_N と書くと，プット・オプションのペイオフは

$$P_N = \max(K - S_N, 0) = \begin{cases} K - S_N & (S_N \leq K \text{ のとき}), \\ 0 & (S_N > K \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる．

3.2　無裁定原理と基本定理

無裁定原理

> 与えれた複数の資産を適当に組み合わせて価値 0 のポートフォリオ[1]を作り，初期資産がなくても一定期間後にリスクなしで（確実に）利益を得ることができるとき，与えられた資産の間に裁定機会があるという．資産価格は，このような裁定機会を許さないように相互に調整され市場で決定される．

無裁定価値理論では，この当たり前の無裁定原理に基づいて複数の資産間のあり方とそれを応用した派生商品の価格を導出するものである．そのために，以下を仮定する．

(1) すべての資産は，任意の量を空売り可能である．

(2) 貸出預金と預金金利は等しい．

(3) 税，手数料，品貸料（しなかし），保証金（証拠金）などの取引費用がいらない．

(4) 売買のタイムラグはない．

裁定機会

> 一期間モデルの枠組みで無裁定原理のいう裁定機会とはつぎの (1) から (4) が成立する場合をいう．
>
> (1) 複数の資産が与えれている．
>
> (2) それらの資産を用いて 0 時点でゼロ・ポートフォリオを作る．すなわち，初期資産はゼロである．
>
> (3) 期間中ポートフォリオの組み替えを行わない．
>
> (4) このポートフォリオの N 時点価値が確率 1 で正となること．

これを式で表現するために，ふたつの資産 0 と 1 を考える．0 時点と N 時点でのそれぞれの価格を X_{00}, X_{10}, X_{0N}, X_{1N} （これらは確率変数と考える）とおく．それぞれの資産の組み入れ単位を a_0, a_1 としたポートフォリオを 0 時点で作るとき，0 時点のポートフォリオの価値は

$$V_0(a_0, a_1) = a_0 X_{00} + a_1 X_{10}$$

となる．初期資産はゼロという仮定から，$V_0 = 0$ となる．これは

$$a_0 = a_1 = 0 \qquad \text{または} \quad a_0 a_1 < 0$$

を意味する．以下では，ゼロ・ポートフォリオという場合 $a_0 = a_1 = 0$ を含まないことにする．よって，

$$a_1 = \frac{-a_0 X_{00}}{X_{10}}$$

となるので，$X_{00}=x_{00}$, $X_{10}=x_{10}$ のとき，

$$a_1=\frac{-x_{00}a_0}{x_{10}}$$

となる．N 時点でのポートフォリオの価値は

$$V_N(a_0,\, a_0)=a_0X_{0N}+a_1X_{1N}$$

となる．

1 期間モデルの無裁定性

2 つのふたつの資産 0 と 1 間に裁定機会があるとは，0 時点で適当なゼロ・ポートフォリオ $(a_0,\, a_1)$ を作るとき，$(X_{00},\, X_{10})=(x_{00},\, x_{10})$ が与えられたとき，

$$Q_0(V_N(a_0,\, a_1)\geq 0)=1 \tag{3.1}$$

かつ

$$Q_0(V_N(a_0,\, a_1)>0)>0 \tag{3.2}$$

となることである．ここで，Q_0 は $(X_{00},\, X_{10})=(x_{00},\, x_{10})$ が与えられたときの $(X_{0N},\, X_{1N})$ の条件付確率である．
どのようなゼロ・ポートフォリオを作っても (3.1) と (3.2) を同時にみたすものが存在しないとき，ふたつのふたつの資産 0 と 1 は無裁定という．

上のことを言い換えるとふたつの資産 0 と 1 間の無裁定性は，任意のゼロ・ポートフォリオに対して

$$Q_0(V_N(a_0,\, a_1)>0)>0 \qquad \text{かつ} \qquad Q_0(V_N(a_0,\, a_1)<0)>0$$

あるいは

$$Q_0(V_N(a_0,\, a_1)=0)=1$$

のいずれかが成立することと同値である．

基本定理 I

資産 0 と資産 1 の間に裁定機会が存在しないと仮定しよう．ただし，$i=0,1$ に対して

$$Q_0(X_{iN}>0)>0$$

とする．このとき，以下が成立する：

(1) N 時点で確率 1 で $X_{0N}=X_{1N}$ ならば，0 時点で $x_{00}=x_{10}$ である．

(2) N 時点で確率 1 で $X_{0N}\leq X_{1N}$ ならば，0 時点で $x_{00}\leq x_{10}$ である．

証明　(1) を背理法で証明する．そのために，確率 1 で $X_{0N} = X_{1N}$ かつ $x_{00} < x_{10}$ と仮定する．このとき，つぎのような取引を考える：0 時点で資産 1 を 1 単位空売りし，その資金で 0 資産を

$$a_0 = \frac{x_{10}}{x_{00}} > 1$$

単位購入する．これはゼロ・ホートフォリオになる：

$$V_0(a_0, -1) = a_0 x_{00} + (-1)x_{10} = \frac{x_{10}}{x_{00}} x_{00} - x_{10} = 0$$

からわかる．次に，N 時点で資産 0 を売り，その資金で資産 1 を 1 単位購入し，それを返却して空売りを決済する．このとき，ホート・フォリオの価値推移は下のようになる．

時点	0	N
資産 0	$a_0 x_{00}$	$a_0 X_{0N}$
資産 1	$-x_{01}$	$-X_{1N}$
ホート・フォォリオの価値	$a_0 x_{00} - x_{10} = 0$	$a_0 X_{0N} - X_{1N}$

したがって，仮定から N 時点でのホート・フォリオの価値は

$$V_N(a_0, -1) = a_0 X_{0N} - X_{1N} = (a_0 - 1) X_{0N} > 0$$

となるので，

$$Q_0(V_N(a_0, -1) > 0) = Q_0((a_0 - 1)X_{0N} > 0) = Q_0(X_{0N} > 0) > 0$$

となる．また，明らかに $Q_0(V_N(a_0, -1) \geq 0) = Q_0(X_{0N} \geq 0) = 1$ となる．したがって，$x_{00} < x_{10}$ と仮定すると裁定機会があることになり，矛盾が生じる．同様にして，確率 1 で $X_{0N} = X_{1N}$ かつ $x_{00} > x_{10}$ と仮定した場合，つぎのような取引を考えれば，も裁定機会があることになり矛盾が生じる：0 時点で資産 0 を 1 単位空売りし，その資金で 1 資産を

$$a_1 = \frac{x_{00}}{x_{01}} > 1$$

単位購入する．次に，N 時点で資産 1 を売り，その資金で資産 0 を 1 単位購入し，それを返却して空売りを決済する．

これらのふたつをあわせれた，(1) が証明できた． □

コールオプションの現在価値の一般的な性質

0 時点と N 時点の資産価格を S_0, S_N，0 時点と N 時点のコールオプションの価格を C_0, C_N，行使価格を K をする．

(C1) $C_0 \leq S_0$

(C2) $C_0 \geq \max(S_0 - K\exp(-rNh), 0)$

(C3) 行使価格が K のコールオプションの 0 と N 時点の価値を $C_0(K), C_N(K)$ と書くとする．このとき，$K_1 < K_2$ ならば，$C_0(K_1) \geq C_0(K_2)$

(C4) $K_1 < K_2$ とする．$0 \leq a \leq 1$ のとき，$K_3 = aK_1 + (1-a)K_2$ ならば，

$$C_N(K_3) \leq aC_N(K_1) + (1-a)C_N(K_2)$$

(C4) は以下からわかる：

S_N の価値	$aC_N(K_1)+(1-a)C_N(K_2)$ の価値	$C_N(K_3)$ の価値
$\vdots$	0	0
K_1	0	0
$\vdots$	$a(S_N-K_1)$	0
K_3	$a(S_N-K_1)$	0
$\vdots$	$a(S_N-K_1)$	S_N-K_3
K_2	$a(S_N-K_1)$	S_N-K_3
$\vdots$	$a(S_N-K_1)+(1-a)(S_N-K_2)$ $=S_N-K_3$	S_N-K_3

N 時点において

$$C_N - P_N + K = S_N$$

という関係式から

プット・コール・パリティ

行使価格が同一のコール・オプションとプット・オプションに対して

$$C_0 - P_0 + K\exp(-rNh) = S_0$$

が成立する．

3.3 1 期間無裁定価格理論

記号の定義の復習をする．$X_{00}, X_{10}, X_{0N}, X_{1N}$ を資産 0 と 1 の 0 時点と N 時点のそれぞれの価格とする．ただし，これらは連続型確率変数と考え，$(X_{00}, X_{10}, X_{0N}, X_{1N})$ は同時確率密度関数

$$f_{X_{00}, X_{10}, X_{0N}, X_{1N}}(x_{00}, x_{10}, x_{0N}, x_{1N})$$

を持つとする．したがって，$\mathbb{R}^4 = (-\infty, \infty)^4$ の部分集合 A に対して，

$$\mathbb{P}((X_{00}, X_{10}, X_{0N}, X_{1N}) \in A) = \int_A f_{X_{00}, X_{10}, X_{0N}, X_{1N}}(x_{00}, x_{10}, x_{0N}, x_{1N})\, dx_{00}\, dx_{10}\, dx_{0N}\, dx_{1N}$$

となる．$(X_{00}, X_{10}) = (x_{00}, x_{10})$ が与えられたときの (X_{0N}, X_{1N}) の条件付確率密度関数を $f_{X_{0N}, X_{1N}|\, 00, X_{10}}(x_{0N}, x_{1N}|\, x_{00}, x_{10})$ を

$$f_{X_{0N}, X_{1N}|\, 00, X_{10}}(x_{0N}, x_{1N}|\, x_{00}, x_{10}) = \frac{f_{X_{00}, X_{10}, X_{0N}, X_{1N}}(x_{00}, x_{10}, x_{0N}, x_{1N})}{f_{X_{0N}, X_{1N}}(x_{0N}, x_{1N})}$$

で定める．ただし，

$$f_{X_{0N}, X_{1N}}(x_{0N}, x_{1N}) = \int\int f_{X_{00}, X_{10}, X_{0N}, X_{1N}}(x_{00}, x_{10}, x_{0N}, x_{1N})\, dx_{0N}\, dx_{1N}$$

である．$(X_{00}, X_{10}) = (x_{00}, x_{10})$ が与えられたときの (X_{0N}, X_{1N}) の条件付確率分布 Q_0 とは，$\mathbb{R}^2 = (-\infty, infty)^2$ の部分集合 A に対して，

$$Q_0((X_{0N}, X_{1N}) \in A|\, x_{00}, x_{10}) = \int_A f_{X_{0N}, X_{1N}|\, 00, X_{10}}(x_{0N}, x_{1N}|\, x_{00}, x_{10})\, dx_{0N}\, dx_{1N} \tag{3.3}$$

をみたすものとである．

(X_{0N}, X_{1N}) に特定の条件付確率分布の族（集まり）を仮定することを「モデル」を与えるということにする．これは条件付確率密度関数 $f_{X_{0N}, X_{1N}|\, 00, X_{10}}(x_{0N}, x_{1N}|\, x_{00}, x_{10})$ が即する確率密度関数の族（集まり）を与えることと同義である．

たとえば，$(X_{00}, X_{10}) = (x_{00}, x_{10})$ が与えると X_{10} は確定的と仮定し，収益率 $\log(X_{1N}/X_{10})$ が平均 μ と分散 σ^2 の正規分布の族に含まれると仮定する．

以後では，条件付確率分布 Q_0 が含まれる族を $\mathcal{F}_0$ とする．すなわち，(3.3) で Q_0 を与える確率密度関数の集まりである．

ふたつの確率分布が同等であるとは以下のことである．$f(x_{0N}, x_{1N})$ は

$$f(x_{0N}, x_{1N}) = \begin{cases} > 0 & ((x_{0N}, x_{1N}) \in D_0 \times D_1), \\ = 0 & ((x_{0N}, x_{1N}) \notin D_0 \times D_1), \end{cases}$$

とする．ただし，D_0, D_1 は $\mathbb{R}$ の区間とする．ある確率密度関数 $f^*(x_{0N}, x_{1N})$ が $f(x_{0N}, x_{1N})$ と同等であるとは

$$D_0 \times D_1 = \{(x_{0N}, x_{1N}) \in \mathbb{R}^2|\, f^*(x_{0N}, x_{1N}) > 0\}$$

をみたすときをいう．

無裁定性の十分条件

$(X_{0N},\, X_{1N})$ の条件付分布のモデルを $\mathcal{F}_0$ とする．もし，$(X_{00},\, X_{01}) = (x_{00},\, x_{01})$ をあたえたときの $(X_{0N},\, X_{1N})$ の条件付確率分布 Q_0 と同等な条件付確率分布 Q_0^* の確率密度関数（$f^*_{X_{0N},\,X_{1N}|\,00,\,X_{01}}(x_{0N},\, x_{1N}|\, x_{00},\, x_{01})$ と書くことにする）が $\mathcal{F}_0$ の中に存在して

$$\mathbb{E}_0^*\left[\frac{X_{1N}}{X_{0N}}\right] = \int\!\!\int \frac{x_{1N}}{x_{0N}} f^*_{X_{0N},\,X_{1N}|\,00,\,X_{01}}(x_{0N},\, x_{1N}|\, x_{00},\, x_{01})\, dx_{0N}\, dx_{1N} = \frac{x_{10}}{x_{00}} \tag{3.4}$$

が成立するならば，資産 0 と資産 1 は無裁定である．Q_0^* のことをリスク中立確率分布という．

3.4　株式と預金の無裁定性

ここでは，0 資産を預金とし，1 資産をある株式とする．金利として単位時間スポット・レートを考え，それが時間的に不変であると仮定する．したがって，預金の価格の時間的なプロセス（n 時点における）は

$$B_n = \exp(r^* nh)$$

となる．ただし，h は単位時間とし，$r(h)$ を単位時間金利[2]としてとき，$r^* = (1/h)\log(1+hr(h))$ とする．

再度，0 時点と N 時点の 1 期間モデルを考えることにしよう．0 時点と N 時点での預金の価格を B_0 と B_N，0 時点と N 時点での株式の価格を S_0 と S_N とおく．$B_0 = b_0, S_0 = s_0$ が与えれらときのゼロ・ポートフォリオ

$$V_0(a_0,\, a_1) = a_0 b_0 + a_1 s_0 = 0$$

を考える．すなわち，$a_1 = -a_0 b_0/s_0$ である．裁定機会があるとは，N 時点において $S_0 = s_0$ を与えたときの S_N 時点の条件付確率分布 Q_0 のもとで

$$Q_0(V_N(a_0,\, a_1) \geq 0) = 1 \qquad \text{かつ} \qquad Q_0(V_N(a_0,\, a_1) > 0) > 0$$

となるときをいう．ここで，$Q_o(B_N = b_0 \exp(r^* Nh)) = 1$ となり，B_N は確定的である．S_N は連続型確率変数とすると

$$Q_0(V_N(a_0,\, a_1) = 0) = 0$$

となるので，裁定機会は

$$Q_0(V_N(a_0,\, a_1) > 0) = 1$$

となるゼロ・ポートフォリオが存在することである．

[2]したがって，1 年後の 1 円は $(1 + hr(h))^{1/h}$ となる．

無裁定機会の十分条件

$b_0 = 1$ とする．S_N のモデルを $\mathcal{F}_0$ とする．預金とある株式が無裁定であるためには，適当な同等な条件付確率分布 Q_0^* が $\mathcal{F}_0$ の中に存在して

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_0^*\left[\frac{S_N}{B_N}\right] &= \int \frac{s_N}{b_N} f^*_{S_N|\,S_0}(s_N|\,s_0)\,ds_N \\ &= \exp(-r^*Nh)\int s_N f^*_{S_N|\,S_0}(s_N|\,s_0)\,ds_N = s_0 \qquad (3.5)\end{aligned}$$

であることが十分条件である．ただし，$f^*_{S_N|\,S_0}(s_N|\,s_0)$ は Q_0^* の確率密度関数である．

株価変動モデルとしてしばしば利用される対数正規モデルの場合を考えて無裁定性条件を見てみよう．すなわち，

$$S_N = S_0\exp(Z_N), \qquad Z_N \sim N(\eta,\,\delta^2)$$

である．ただし，$\delta > 0$ とする．したがって，

$$Z_N = \log\left(\frac{S_N}{S_0}\right) \sim N(\eta,\,\delta^2)$$

である．$S_0 = s_0$ が与えられたときの Z_N の条件付確率密度関数を $g(z_N|\,s_0)$ とする．

まず，S_N の分布の仮定に関わらず，(3.5) は

$$\mathbb{E}_0^*\left[\frac{S_N}{B_N}\right] = \mathbb{E}_0^*\left[\frac{s_0\exp(Z_N)}{B_N}\right]$$

となる．すると

$$g_0^*(z_N|\,s_0)\text{ の存在} \iff f^*_{S_N|\,S_0}(s_N|\,s_0)\text{ の存在}$$

となる[3]．したがって，

$$g\text{ と }g^*\text{ が同等} \iff f\text{ と }f^*\text{ が同等}$$

となる．これより，無裁定性の十分条件は Z_N の確率密度関数 g と同等な確率密度関数 g^* のもとで

$$\mathbb{E}_0^*\left[\frac{s_0\exp(Z_N)}{B_N}\right] = s_0$$

となる．g は正規分布なので，g^* も正規分布でなければいけない．

g^* をみつけるために以下のことを使う．$X \sim N(\alpha,\,\beta^2)$ とする．ただし，$\beta > 0$ である．すなわち，X の確率密度関数は

$$\phi(x|\,\alpha,\,\beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\beta}\exp\left(-\frac{(x-\alpha)^2}{2\beta^2}\right)$$

[3]証明は page 88 を参照

である．このとき，任意の定数 c に対して，

$$\mathbb{E}[\exp(cX)] = \exp\left(c\alpha + \frac{c^2\beta^2}{2}\right) \tag{3.6}$$

となる[4]．

天下りではあるが，g^* を見つけるために，

$$g^*(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta}\exp\left(-\frac{(z-\eta-b)^2}{2\delta^2}\right)$$

とおいて，g^* の存在を示す．すなわち，$Z_N \sim N(\eta+b,\, \delta^2)$ である．

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\frac{\exp(Z_N)}{B_N}\right] &= \exp(-Nr^*h)\mathbb{E}[\exp(Z_N)] = \exp(-Nr^*h)\exp\left(\eta+b+\frac{1}{2}\delta^2\right)\\ &= \exp\left(\eta+b-Nhr^*+\frac{1}{2}\delta^2\right)\end{aligned}$$

となる．

$$\mathbb{E}_0^*\left[\frac{s_0\exp(Z_N)}{B_N}\right] = s_0 \Longleftrightarrow \mathbb{E}_0^*\left[\frac{\exp(Z_N)}{B_N}\right] = 1$$

から

$$\eta+b-Nhr^*+\frac{1}{2}\delta^2 = 0$$

となり，

$$b = -\left(\eta - Nhr^* + \frac{1}{2}\delta^2\right)$$

をえる．すなわち，無裁定条件を保証する同等な確率分布は

$$Z_n \sim N(\eta+b,\, \delta^2) = N(\eta - \left(\eta - Nhr^* + \frac{1}{2}\delta^2\right),\, \delta^2) = N(Nh(r^* - \frac{1}{2}\delta^2),\, \delta^2)$$

となる．

定理

$$Z_N = \log\left(\frac{S_N}{S_0}\right) \sim \mathrm{normal}\left(\mu Nh,\, Nh\sigma^2)\right), \qquad B_N = \exp(Nhr^*)$$

のとき，無裁条件は，同等な確率分布

$$S_N = S_0\exp(Z_N), \qquad Z_N \sim \mathrm{normal}\left(Nh\left(r^* - \frac{1}{2}\sigma^2,\right),\, Nh\sigma^2\right)$$

のもとで保証される．

[4]証明は page 89 を参照

この定理では，$N(\xi,\,\delta^2)$ を $\mathrm{normal}(\xi,\,\delta^2)$ と書いた．

上の議論を後で利用するために，標準化変換を用いて整理しておく．N 時点株価変動モデルとして，

$$S_N = S_0 \exp(Z_N)$$

とし，S_0 を与えたときの条件付き確率分布として正規分布

$$Z_N \sim N(Nh\mu,\, NH\sigma^2)$$

を仮定[5]しよう．標準変換を利用して

$$Z_N = Nh\mu + \sqrt{Nh}\sigma U$$

とする[6]．これより，S_N のモデルは

$$S_N = S_0 \exp(\mu Nh + \sigma\sqrt{Nh}U)$$

となる．このとき，求める評価すべき条件付き期待値を

$$\mathbb{E}_0^*\left[\frac{S_N}{B_N}\right] = \mathbb{E}_0^*\left[\frac{S_0 \exp(\mu Nh + \sigma\sqrt{Nh}U)}{B_N}\right]$$

として，U の標準正規確率密度関数を $\phi(u)$ としたとき，これと同等な $\phi^*(u)$ が存在して

$$\mathbb{E}_0^*\left[\frac{S_0 \exp(\mu Nh + \sigma\sqrt{Nh}U)}{B_N}\right] = S_0$$

となれば，無裁定性の条件となる．いま，U の平均をずらした

$$U = V + d\sqrt{Nh} \sim N(d\sqrt{Nh},\, 1), \qquad V \sim N(0,\, 1)$$

を ϕ^* の候補として

$$\mathbb{E}_0^*[\exp(\mu Nh + \sigma\sqrt{Nh}U - Nhr^*)] = 1$$

をみたす d を求める[7]．(3.6) から[8]

$$\exp\left(Nh\mu + Nhd\sigma - Nhr^* + \frac{1}{2}Nh\sigma^2\right) = 1$$

となる．それゆえ

$$d = -\frac{1}{\sigma}\left(\mu - r^* + \frac{1}{2}\sigma^2\right)$$

となる．

---

[5] このときの S_N の分布を対数正規分布という．実際，

$$\log S_N = \log S_0 + Z_N \sim N(\log S_0 + \mu Nh,\, \sigma^2 Nh)$$

となるからである．

[6] すなわち，

$$U = \frac{Z_N - \mu Nh}{\sigma\sqrt{Nh}} \sim N(0,\, 1)$$

である．

[7] $B_N = \exp(Nhr^*)$, $B_0 = 1$ である．

[8] $c = \sigma\sqrt{Nh}$, $\alpha = d\sqrt{Nh}$, $\beta = 1$ とおく．

3.5　オプション価格理論

前節の結果をヨーロピアン・コール・オプションの価格評価に適応しよう．まず，ペイオフは

$$C_N(S_N) = \max(S_N - K, 0)$$

であった．また，無裁定条件は同等な確率分布

$$S_N \sim S_0 \exp(Z_N), \qquad Z_N \sim N\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) Nh, \sigma^2 Nh\right) \tag{3.7}$$

のもとで保障された．したがって，預金とコールの間の無裁定条件を表現すると

$$\mathbb{E}_0^*\left[\frac{C_N(S_N)}{B_N}\right] = \frac{C_0}{B_0}$$

となる．したがって，

$$C_0 = B_0 \mathbb{E}_0^*\left[\frac{C_N(S_N)}{B_N}\right] = \exp(-Nhr)\mathbb{E}_0^*[C_N(S_N)]$$

と決めてやればよい．ただし，S_N の条件付き分布は (3.7) である．この式を評価する：

ブラック・ショールズの公式

株式ヨーロピアン・コールの 0 時点価格は

$$C_0 = S_0\Phi(d_0) - K\exp(-Nhr)\Phi(d_0 - \sigma\sqrt{Nh}) \tag{3.8}$$

である．ただし，

$$d_0 = \frac{\log(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)Nh}{\sigma\sqrt{Nh}}, \qquad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\ pi}} e^{-t^2/2}\, dt$$

である．

補題 3.5.1　任意の α と $\beta > 0$ に対して

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha}^{\infty} \exp(\beta u)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-u^2/2)\, du &= \exp(\frac{1}{2}\beta^2)\int_{-\infty}^{\beta-\alpha}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-u^2/2)\, du \\
&= \exp(\frac{1}{2}\beta^2)\Phi(\beta - \alpha), \\
\int_{-\infty}^{\alpha} \exp(\beta u)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-u^2/2)\, du &= \exp(\frac{1}{2}\beta^2)\int_{-\infty}^{\alpha-\beta}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-u^2/2)\, du \\
&= \exp(\frac{1}{2}\beta^2)\Phi(\alpha - \beta),
\end{aligned}$$

(3.8) の証明

$$U = \frac{Z_N - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)Nh}{\sigma\sqrt{Nh}}$$

とおくと $U \sim N(0, 1)$ になることに注意する．したがって,

$$Z_N = \sigma\sqrt{Nh}U + rNh - \frac{1}{2}\sigma^2 Nh$$

である．さらに,

$$\tilde{S}_N(U) = S_N(Z_N) = S_N\left(\sigma\sqrt{Nh}U + rNh - \frac{1}{2}\sigma^2 Nh\right)$$

とおく．ここで,

$$S_N - K > 0 \Longleftrightarrow S_0 \exp(Z_N) - K > 0 \Longleftrightarrow Z_N > \log(K/S_0) \Longleftrightarrow U > -\frac{\log(S_0/K) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)Nh}{\sigma\sqrt{Nh}}$$

に注意して,

$$\alpha = -\frac{\log(K/S_0) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)Nh}{\sigma\sqrt{Nh}}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^*[C_N] &= \int_\alpha^\infty (\tilde{S}_N(u) - K)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}\,du \\
&= \int_\alpha^\infty \tilde{S}_N(u)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}\,du - K\int_\alpha^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}\,du \\
&= S_0\int_\alpha^\infty \exp\left(\sigma\sqrt{Nh}u + rNh - \frac{1}{2}\sigma^2 Nh\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}\,du - K\int_\alpha^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}\,du \\
&= S_0\exp\left(rNh - \frac{1}{2}\sigma^2 Nh\right)\int_\alpha^\infty \exp(\sigma\sqrt{Nh}u)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}\,du - K\int_\alpha^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}\,du \\
&= S_0\exp\left(rNh - \frac{1}{2}\sigma^2 Nh\right)\exp\left(\frac{1}{2}Nh\sigma^2\right)\Phi(\sqrt{Nh}\sigma - \alpha) - K\Phi(-\alpha) \\
&= S_0\exp(rNh)\Phi(\sqrt{Nh}\sigma - \alpha) - K\Phi(-\alpha)
\end{aligned}$$

となる．最後に,

$$\begin{aligned}
\sqrt{Nh}\sigma - \alpha &= d_0, \\
-\alpha &= d_0 - \sigma\sqrt{Nh}, \\
B_N &= \exp(-Nhr)
\end{aligned}$$

に注意すればよい．