3.3 1 期間無裁定価格理論

記号の定義の復習をする．$X_{00}, X_{10}, X_{0N}, X_{1N}$ を資産 0 と 1 の 0 時点と N 時点のそれぞれの価格とする．ただし，これらは連続型確率変数と考え，$(X_{00}, X_{10}, X_{0N}, X_{1N})$ は同時確率密度関数

$$f_{X_{00}, X_{10}, X_{0N}, X_{1N}}(x_{00}, x_{10}, x_{0N}, x_{1N})$$

を持つとする．したがって，$\mathbb{R}^4 = (-\infty, \infty)^4$ の部分集合 A に対して，

$$\mathbb{P}((X_{00}, X_{10}, X_{0N}, X_{1N}) \in A) = \int_A f_{X_{00}, X_{10}, X_{0N}, X_{1N}}(x_{00}, x_{10}, x_{0N}, x_{1N})\, dx_{00}\, dx_{10}\, dx_{0N}\, dx_{1N}$$

となる．$(X_{00}, X_{10}) = (x_{00}, x_{10})$ が与えられたときの (X_{0N}, X_{1N}) の条件付確率密度関数を $f_{X_{0N}, X_{1N}|\,00, X_{10}}(x_{0N}, x_{1N}|\, x_{00}, x_{10})$ を

$$f_{X_{0N}, X_{1N}|\,00, X_{10}}(x_{0N}, x_{1N}|\, x_{00}, x_{10}) = \frac{f_{X_{00}, X_{10}, X_{0N}, X_{1N}}(x_{00}, x_{10}, x_{0N}, x_{1N})}{f_{X_{0N}, X_{1N}}(x_{0N}, x_{1N})}$$

で定める．ただし，

$$f_{X_{0N}, X_{1N}}(x_{0N}, x_{1N}) = \int\int f_{X_{00}, X_{10}, X_{0N}, X_{1N}}(x_{00}, x_{10}, x_{0N}, x_{1N})\, dx_{0N}\, dx_{1N}$$

である．$(X_{00}, X_{10}) = (x_{00}, x_{10})$ が与えられたときの (X_{0N}, X_{1N}) の条件付確率分布 Q_0 とは，$\mathbb{R}^2 = (-\infty, infty)^2$ の部分集合 A に対して，

$$Q_0((X_{0N}, X_{1N}) \in A|\, x_{00}, x_{10}) = \int_A f_{X_{0N}, X_{1N}|\,00, X_{10}}(x_{0N}, x_{1N}|\, x_{00}, x_{10})\, dx_{0N}\, dx_{1N} \tag{3.3}$$

をみたすものとである．

(X_{0N}, X_{1N}) に特定の条件付確率分布の族（集まり）を仮定することを「モデル」を与えるということにする．これは条件付確率密度関数 $f_{X_{0N}, X_{1N}|\,00, X_{10}}(x_{0N}, x_{1N}|\, x_{00}, x_{10})$ が即する確率密度関数の族（集まり）を与えることと同義である．

たとえば，$(X_{00}, X_{10}) = (x_{00}, x_{10})$ が与えると X_{10} は確定的と仮定し，収益率 $\log(X_{1N}/X_{10})$ が平均 μ と分散 σ^2 の正規分布の族に含まれると仮定する．

以後では，条件付確率分布 Q_0 が含まれる族を $\mathcal{F}_0$ とする．すなわち，(3.3) で Q_0 を与える確率密度関数の集まりである．

ふたつの確率分布が同等であるとは以下のことである．$f(x_{0N}, x_{1N})$ は

$$f(x_{0N}, x_{1N}) = \begin{cases} > 0 & ((x_{0N}, x_{1N}) \in D_0 \times D_1), \\ = 0 & ((x_{0N}, x_{1N}) \notin D_0 \times D_1), \end{cases}$$

とする．ただし，D_0, D_1 は $\mathbb{R}$ の区間とする．ある確率密度関数 $f^*(x_{0N}, x_{1N})$ が $f(x_{0N}, x_{1N})$ と同等であるとは

$$D_0 \times D_1 = \{(x_{0N}, x_{1N}) \in \mathbb{R}^2|\, f^*(x_{0N}, x_{1N}) > 0\}$$

をみたすときをいう．

無裁定性の十分条件

$(X_{0N},\, X_{1N})$ の条件付分布のモデルを $\mathcal{F}_0$ とする．もし，$(X_{00},\, X_{01}) = (x_{00},\, x_{01})$ をあたえたときの $(X_{0N},\, X_{1N})$ の条件付確率分布 Q_0 と同等な条件付確率分布 Q_0^* の確率密度関数（$f^*_{X_{0N},\, X_{1N}|\, 00,\, X_{01}}(x_{0N},\, x_{1N}|\, x_{00},\, x_{01})$ と書くことにする）が $\mathcal{F}_0$ の中に存在して

$$\mathbb{E}_0^*\left[\frac{X_{1N}}{X_{0N}}\right] = \int\!\!\int \frac{x_{1N}}{x_{0N}} f^*_{X_{0N},\, X_{1N}|\, 00,\, X_{01}}(x_{0N},\, x_{1N}|\, x_{00},\, x_{01})\, dx_{0N}\, dx_{1N} = \frac{x_{10}}{x_{00}} \tag{3.4}$$

が成立するならば，資産 0 と資産 1 は無裁定である．Q_0^* のことをリスク中立確率分布という．

3.4　株式と預金の無裁定性

ここでは，0 資産を預金とし，1 資産をある株式とする．金利として単位時間スポット・レートを考え，それが時間的に不変であると仮定する．したがって，預金の価格の時間的なプロセス（n 時点における）は

$$B_n = \exp(r^* nh)$$

となる．ただし，h は単位時間とし，$r(h)$ を単位時間金利[2]としてとき，$r^* = (1/h)\log(1+hr(h))$ とする．

再度，0 時点と N 時点の 1 期間モデルを考えることにしよう．0 時点と N 時点での預金の価格を B_0 と B_N，0 時点と N 時点での株式の価格を S_0 と S_N とおく．$B_0 = b_0,\, S_0 = s_0$ が与えれらときのゼロ・ポートフォリオ

$$V_0(a_0,\, a_1) = a_0 b_0 + a_1 s_0 = 0$$

を考える．すなわち，$a_1 = -a_0 b_0/s_0$ である．裁定機会があるとは，N 時点において $S_0 = s_0$ を与えたときの S_N 時点の条件付確率分布 Q_0 のもとで

$$Q_0(V_N(a_0,\, a_1) \geq 0) = 1 \qquad \text{かつ} \qquad Q_0(V_N(a_0,\, a_1) > 0) > 0$$

となるときをいう．ここで，$Q_o(B_N = b_0 \exp(r^* Nh)) = 1$ となり，B_N は確定的である．S_N は連続型確率変数とすると

$$Q_0(V_N(a_0,\, a_1) = 0) = 0$$

となるので，裁定機会は

$$Q_0(V_N(a_0,\, a_1) > 0) = 1$$

となるゼロ・ポートフォリオが存在することである．

[2]したがって，1 年後の 1 円は $(1 + hr(h))^{1/h}$ となる．

無裁定機会の十分条件

$b_0 = 1$ とする．S_N のモデルを $\mathcal{F}_0$ とする．預金とある株式が無裁定であるためには，適当な同等な条件付確率分布 Q_0^* が $\mathcal{F}_0$ の中に存在して

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_0^*\left[\frac{S_N}{B_N}\right] &= \int \frac{s_N}{b_N} f^*_{S_N|\,S_0}(s_N|\,s_0)\,ds_N \\ &= \exp(-r^*Nh)\int s_N f^*_{S_N|\,S_0}(s_N|\,s_0)\,ds_N = s_0 \qquad (3.5)\end{aligned}$$

であることが十分条件である．ただし，$f^*_{S_N|\,S_0}(s_N|\,s_0)$ は Q_0^* の確率密度関数である．

株価変動モデルとしてしばしば利用される対数正規モデルの場合を考えて無裁定性条件を見てみよう．すなわち，

$$S_N = S_0 \exp(Z_N), \qquad Z_N \sim N(\eta,\, \delta^2)$$

である．ただし，$\delta > 0$ とする．したがって，

$$Z_N = \log\left(\frac{S_N}{S_0}\right) \sim N(\eta,\, \delta^2)$$

である．$S_0 = s_0$ が与えられたときの Z_N の条件付確率密度関数を $g(z_N|\,s_0)$ とする．

まず，S_N の分布の仮定に関わらず，(3.5) は

$$\mathbb{E}_0^*\left[\frac{S_N}{B_N}\right] = \mathbb{E}_0^*\left[\frac{s_0\exp(Z_N)}{B_N}\right]$$

となる．すると

$$g_0^*(z_N|\,s_0) \text{ の存在} \iff f^*_{S_N|\,S_0}(s_N|\,s_0) \text{ の存在}$$

となる[3]．したがって，

$$g \text{ と } g^* \text{ が同等} \iff f \text{ と } f^* \text{ が同等}$$

となる．これより，無裁定性の十分条件は Z_N の確率密度関数 g と同等な確率密度関数 g^* のもとで

$$\mathbb{E}_0^*\left[\frac{s_0\exp(Z_N)}{B_N}\right] = s_0$$

となる．g は正規分布なので，g^* も正規分布でなければいけない．

g^* をみつけるために以下のことを使う．$X \sim N(\alpha,\, \beta^2)$ とする．ただし，$\beta > 0$ である．すなわち，X の確率密度関数は

$$\phi(x|\,\alpha,\, \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\beta}\exp\left(-\frac{(x-\alpha)^2}{2\beta^2}\right)$$

[3]証明は page 88 を参照

である．このとき，任意の定数 c に対して，

$$\mathbb{E}[\exp(cX)] = \exp\left(c\alpha + \frac{c^2\beta^2}{2}\right) \tag{3.6}$$

となる[4]．

天下りではあるが，g^* を見つけるために，

$$g^*(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta}\exp\left(-\frac{(z-\eta-b)^2}{2\delta^2}\right)$$

とおいて，g^* の存在を示す．すなわち，$Z_N \sim N(\eta+b,\,\delta^2)$ である．

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\frac{\exp(Z_N)}{B_N}\right] &= \exp(-Nr^*h)\mathbb{E}[\exp(Z_N)] = \exp(-Nr^*h)\exp\left(\eta+b+\frac{1}{2}\delta^2\right)\\ &= \exp\left(\eta+b-Nhr^*+\frac{1}{2}\delta^2\right)\end{aligned}$$

となる．

$$\mathbb{E}_0^*\left[\frac{s_0\exp(Z_N)}{B_N}\right] = s_0 \Longleftrightarrow \mathbb{E}_0^*\left[\frac{\exp(Z_N)}{B_N}\right] = 1$$

から

$$\eta+b-Nhr^*+\frac{1}{2}\delta^2 = 0$$

となり，

$$b = -\left(\eta-Nhr^*+\frac{1}{2}\delta^2\right)$$

をえる．すなわち，無裁定条件を保証する同等な確率分布は

$$Z_n \sim N(\eta+b,\,\delta^2) = N(\eta-\left(\eta-Nhr^*+\frac{1}{2}\delta^2\right),\,\delta^2) = N(Nh(r^*-\frac{1}{2}\delta^2),\,\delta^2)$$

となる．

定理

$$Z_N = \log\left(\frac{S_N}{S_0}\right) \sim \mathrm{normal}\left(\mu Nh,\, Nh\sigma^2\right), \qquad B_N = \exp(Nhr^*)$$

のとき，無裁条件は，同等な確率分布

$$S_N = S_0\exp(Z_N), \qquad Z_N \sim \mathrm{normal}\left(Nh\left(r^*-\frac{1}{2}\sigma^2,\right),\,Nh\sigma^2\right)$$

のもとで保証される．

[4]証明は page 89 を参照

この定理では，$N(\xi,\,\delta^2)$ を $\mathrm{normal}(\xi,\,\delta^2)$ と書いた．

上の議論を後で利用するために，標準化変換を用いて整理しておく．N 時点株価変動モデルとして，

$$S_N = S_0 \exp(Z_N)$$

とし，S_0 を与えたときの条件付き確率分布として正規分布

$$Z_N \sim N(Nh\mu,\, NH\sigma^2)$$

を仮定[5]しよう．標準変換を利用して

$$Z_N = Nh\mu + \sqrt{Nh}\sigma U$$

とする[6]．これより，S_N のモデルは

$$S_N = S_0 \exp(\mu Nh + \sigma\sqrt{Nh}U)$$

となる．このとき，求める評価すべき条件付き期待値を

$$\mathbb{E}_0^*\left[\frac{S_N}{B_N}\right] = \mathbb{E}_0^*\left[\frac{S_0 \exp(\mu Nh + \sigma\sqrt{Nh}U)}{B_N}\right]$$

として，U の標準正規確率密度関数を $\phi(u)$ としたとき，これと同等な $\phi^*(u)$ が存在して

$$\mathbb{E}_0^*\left[\frac{S_0 \exp(\mu Nh + \sigma\sqrt{Nh}U)}{B_N}\right] = S_0$$

となれば，無裁定性の条件となる．いま，U の平均をずらした

$$U = V + d\sqrt{Nh} \sim N(d\sqrt{Nh},\, 1), \qquad V \sim N(0,\,1)$$

を ϕ^* の候補として

$$\mathbb{E}_0^*[\exp(\mu Nh + \sigma\sqrt{Nh}U - Nhr^*)] = 1$$

をみたす d を求める[7]．(3.6) から[8]

$$\exp\left(Nh\mu + Nhd\sigma - Nhr^* + \frac{1}{2}Nh\sigma^2\right) = 1$$

となる．それゆえ

$$d = -\frac{1}{\sigma}\left(\mu - r^* + \frac{1}{2}\sigma^2\right)$$

となる．

---

[5]このときの S_N の分布を対数正規分布という．実際，

$$\log S_N = \log S_0 + Z_N \sim N(\log S_0 + \mu Nh,\, \sigma^2 Nh)$$

となるからである．

[6]すなわち，

$$U = \frac{Z_N - \mu Nh}{\sigma\sqrt{Nh}} \sim N(0,\,1)$$

である．

[7]$B_N = \exp(Nhr^*)$, $B_0 = 1$ である．

[8]$c = \sigma\sqrt{Nh}$, $\alpha = d\sqrt{Nh}$, $\beta = 1$ とおく．

3.5　オプション価格理論

前節の結果をヨーロピアン・コール・オプションの価格評価に適応しよう．まず，ペイオフは

$$C_N(S_N) = \max(S_N - K,\, 0)$$

であった．また，無裁定条件は同等な確率分布

$$S_N \sim S_0 \exp(Z_N), \qquad Z_N \sim N\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) Nh,\, \sigma^2 Nh\right) \tag{3.7}$$

のもとで保障された．したがって，預金とコールの間の無裁定条件を表現すると

$$\mathbb{E}_0^*\left[\frac{C_N(S_N)}{B_N}\right] = \frac{C_0}{B_0}$$

となる．したがって，

$$C_0 = B_0 \mathbb{E}_0^*\left[\frac{C_N(S_N)}{B_N}\right] = \exp(-Nhr)\mathbb{E}_0^*[C_N(S_N)]$$

と決めてやればよい．ただし，S_N の条件付き分布は (3.7) である．この式を評価する：

ブラック・ショールズの公式

株式ヨーロピアン・コールの 0 時点価格は

$$C_0 = S_0\Phi(d_0) - K\exp(-Nhr)\Phi(d_0 - \sigma\sqrt{Nh}) \tag{3.8}$$

である．ただし，

$$d_0 = \frac{\log(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)Nh}{\sigma\sqrt{Nh}}, \qquad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt$$

である．

補題 3.5.1　任意の α と $\beta > 0$ に対して

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^\infty \exp(\beta u)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-u^2/2)\,du &= \exp(\frac{1}{2}\beta^2)\int_{-\infty}^{\beta-\alpha}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-u^2/2)\,du \\
&= \exp(\frac{1}{2}\beta^2)\Phi(\beta - \alpha), \\
\int_{-\infty}^\alpha \exp(\beta u)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-u^2/2)\,du &= \exp(\frac{1}{2}\beta^2)\int_{-\infty}^{\alpha-\beta}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-u^2/2)\,du \\
&= \exp(\frac{1}{2}\beta^2)\Phi(\alpha - \beta),
\end{aligned}$$

(3.8) の証明

$$U = \frac{Z_N - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)Nh}{\sigma\sqrt{Nh}}$$

とおくと $U \sim N(0, 1)$ になることに注意する．したがって，

$$Z_N = \sigma\sqrt{Nh}U + rNh - \frac{1}{2}\sigma^2 Nh$$

である．さらに，

$$\tilde{S}_N(U) = S_N(Z_N) = S_N\left(\sigma\sqrt{Nh}U + rNh - \frac{1}{2}\sigma^2 Nh\right)$$

とおく．ここで，

$$S_N - K > 0 \Longleftrightarrow S_0\exp(Z_N) - K > 0 \Longleftrightarrow Z_N > \log(K/S_0) \Longleftrightarrow U > -\frac{\log(S_0/K) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)Nh}{\sigma\sqrt{Nh}}$$

に注意して，

$$\alpha = -\frac{\log(K/S_0) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)Nh}{\sigma\sqrt{Nh}}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^*[C_N] &= \int_\alpha^\infty (\tilde{S}_N(u) - K)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}\,du \\
&= \int_\alpha^\infty \tilde{S}_N(u)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}\,du - K\int_\alpha^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}\,du \\
&= S_0\int_\alpha^\infty \exp\left(\sigma\sqrt{Nh}u + rNh - \frac{1}{2}\sigma^2 Nh\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}\,du - K\int_\alpha^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}\,du \\
&= S_0\exp\left(rNh - \frac{1}{2}\sigma^2 Nh\right)\int_\alpha^\infty \exp(\sigma\sqrt{Nh}u)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}\,du - K\int_\alpha^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}\,du \\
&= S_0\exp\left(rNh - \frac{1}{2}\sigma^2 Nh\right)\exp\left(\frac{1}{2}Nh\sigma^2\right)\Phi(\sqrt{Nh}\sigma - \alpha) - K\Phi(-\alpha) \\
&= S_0\exp(rNh)\Phi(\sqrt{Nh}\sigma - \alpha) - K\Phi(-\alpha)
\end{aligned}$$

となる．最後に，

$$\begin{aligned}
\sqrt{Nh}\sigma - \alpha &= d_0, \\
-\alpha &= d_0 - \sigma\sqrt{Nh}, \\
B_N &= \exp(-Nhr)
\end{aligned}$$

に注意すればよい．

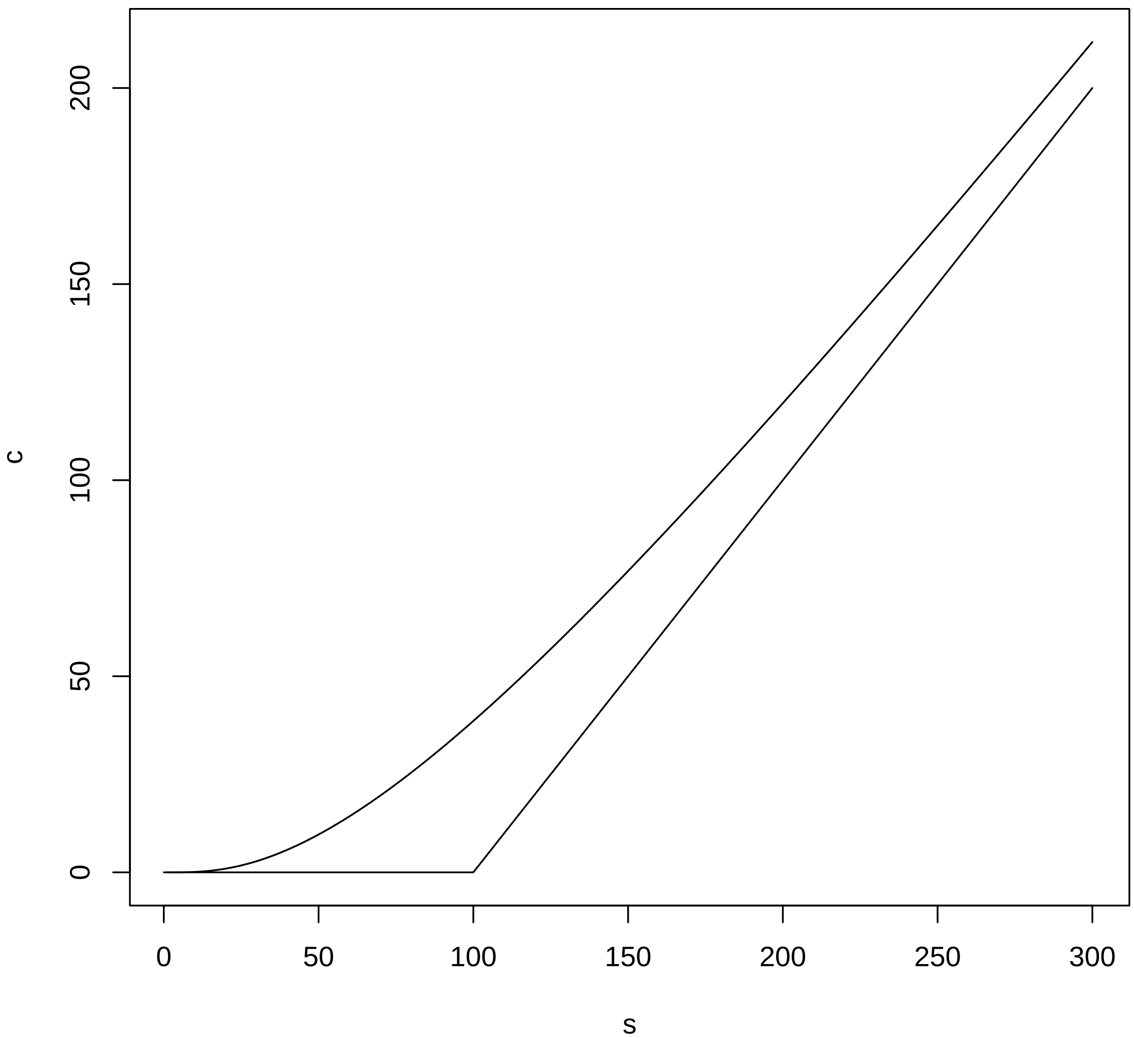

図 3.1: コールオプションの現在価値とペイオフ関数．横軸は S_0 もしくは S_N の価格（$nh = 1$, $\sigma = 1$, $k = 100$, $r^* = 0.01$ ）