2003 年 12 月 19 日　（今野）

# レポート問題（数理トピックス II-2)

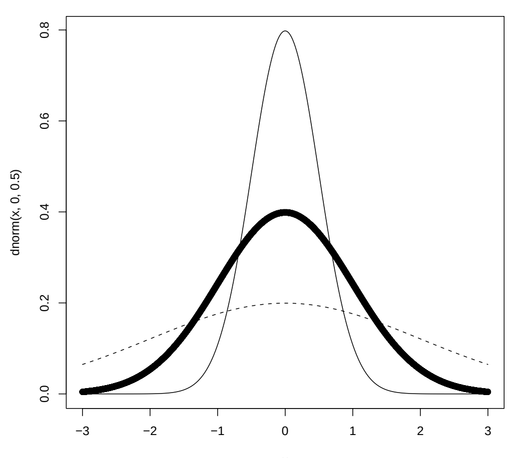
1. 以下の $\boxed{\text{問題 1}}$ から $\boxed{\text{問題 7}}$ の中から 3 題以上を選んだ上，解答せよ．
2. 締め切りは 2004 年 1 月 6 日（火）16 時半
3. レポートの提出先は数研
4. 問題に不明な点があれば，email: konno@fc.jwu.ac.jp まで連絡してください．
5. 訂正等は

   http://mp-w3math.jwu.ac.jp/~konno/stati.html

   に提示します．

$\boxed{\text{問題 1}}$　表の出る確率が 1/2 のコインの 4 回投げる実験を行う．このとき，4 回中におもての出る回数を $X$ としたとき，以下の問いに答えよ．
(i) $X$ の確率分布表を求めよ．
(ii) $X$ の期待値と分散を離散型確率変数の期待値のの定義に戻り求めよ．

$\boxed{\text{問題 2}}$　左の図は平均 0，分散 1 の正規分布の確率密度関数のグラフは図中に太い線で描いてある．実線と破線の確率密度関数のグラフは平均 0，分散 0.25 の正規分布と平均 0，分散 4 の正規分布のいずれかである．実線と破線のグラフはどちらの確率密度関数のグラフであるか答えとその理由を述べよ．



$\boxed{\text{問題 3}}$ $X$ は確率変数で $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ とし，

$$U = \frac{X - \mathbb{E}[X]}{\sqrt{\mathbb{VAR}[X]}}$$

とおく．このとき，

$$\mathbb{E}[U] = 0, \qquad \mathbb{VAR}[U] = 1$$

となることを示せ．ただし，定数 $a, b$ に対して

$$\mathbb{E}[X + a] = \mathbb{E}[X] + a, \qquad \mathbb{VAR}[aX + b] = a^2 \mathbb{VAR}[X]$$

が成立することを用いてよい．

$\boxed{\text{問題 4}}$ 単位時間を $h = 1/12$ 年とし，単位時間金利を $r(h)$ とし，時間的に不変とする．
(1) $n\,(n = 1, 2, \ldots)$ 時点 ( $nh$ 年後）の $c$ 円の現在価値はどのように表現できるか？
(2) 現時点で 1000 万円借りて，120 ヶ月にわたって毎月一定金額 $c$ 円を返済するとする．金利構造が一定であると仮定する．$r = 0.04$ のとき， 毎月の返済額 $c$ 円はいくらになるか？
ヒント:$(1.04)^{-1/12} = 0.9967$, $(1.04)^{-10} = 0.6756$, $12\times(1+0.04/12) = 0.0396$, $\exp\{-0.0399/12\} = 0.9967$, $\exp(-10 \times 0.0399) = 0.6710$

$\boxed{\text{問題 5}}$ 単位時間を $h$ とし，預金の単位時間金利 $r(h)$ が時間的に不変で,（瞬間的）単位時間スポットレートを

$$r^* = \frac{1}{h}\log(1 + hr(h))$$

とし，無裁定価格理論の仮定が成立するとし，講義で述べた基本定理を用いてオプションの現在価格を評価可能とする．原資産には配当払いのような途中の現金の流出入はなく，現在時点を 0 時点，オプションの満期時点を $N$ 時点とする．いま，0 時点および $N$ 時点の原資産の価値を $S_0$ および $S_N$ とし，プットオプションの行使価格を $K$ とする．すると $N$ 時点でのオプションの価値は

$$P_N = \max\{K - S_N, 0\}$$

となる．このとき，0 時点のプットオプションのの価値についての下記の評価式を証明せよ．

$$\max\{K\exp(-r^*Nh) - S_0, 0\} \le P_N \le K\exp(-r^*Nh)$$

ただし，$P_0, P_N$ は 0 時点，$N$ 時点でのプットオプションの価値とする．

$\boxed{\text{問題 6}}$ 0 時点と $N$ 時点の株価を $S_0$ と $S_N$ とし，行使価格を $K$，$h$ を単位時間， 預金の単位時間金利 $r(h)$ が時間的に不変で,（瞬間的）単位時間スポットレートを

$$r^* = \frac{1}{h}\log(1 + hr(h))$$

とする．$S_0 = s_0$ が与えられたときの株価変動モデルを

$$S_N \sim s_0\exp(Z_N), \qquad Z_N \sim N(\mu Nh,\, Nh\sigma^2), \qquad -\infty < \mu < \infty,\, \sigma > 0$$

としたとき，1 期間モデルにおけるヨーロピアン・コールオプション

$$C_N = \max\{S_N - K,\, 0\}$$

の 0 時点の価格の評価式であるブラック・ショールズの公式

$$C_0 = S_0\Phi(d_0) - K\exp(-Nhr^*)\Phi(d_0 - \sigma\sqrt{Nh}) \tag{1}$$

を用いて．コールオプションの 0 時点価格の評価しよう．ただし，

$$d_0 = \frac{\log(S_0/K) + (r^* + \sigma^2/2)Nh}{\sigma\sqrt{Nh}}, \qquad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt$$

である．$K = 100,\ N = 12,\ h = 1/12,\ \sigma = 1,\ r^* = 0.01$ として，以下の問いに答えよ．
(1) $S_0 = 50,\ 100,\ 200$ のとき，$C_0$ の下限と上限を求めよ．ただし，$\exp(0.01) = 1.01$ で計算せよ．
(2) $S_0 = 50,\ 100,\ 200$ のとき，$C_0$ をブラック・ショールズの公式を用いて評価せよ．ただし，$\log(0.5) = -0.69$ と

| $x$ | $-1.18$ | $-0.49$ | $-0.18$ | $0.20$ | $0.51$ | $1.20$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Phi(x)$ | 0.12 | 0.31 | 0.443 | 0.58 | 0.69 | 0.88 |

を用いて計算せよ．

$\boxed{\text{問題 7}}$　0 時点と $N$ 時点の株価を $S_0$ と $S_N$ とし，行使価格を $K$，$h$ を単位時間，預金の単位時間金利 $r(h)$ が時間的に不変で,（瞬間的）単位時間スポットレートを

$$r^* = \frac{1}{h}\log(1 + hr(h))$$

とする．

$S_0 = s_0$ が与えられたときの株価変動モデルを

$$S_N \sim s_0\exp(Z_N), \qquad Z_N \sim N(\mu Nh,\, Nh\sigma^2), \qquad -\infty < \mu < \infty,\ \sigma > 0$$

としたとき，1 期間モデルにおけるヨーロピアン・プットオプション

$$P_N = \max\{K - S_N,\, 0\}$$

の 0 時点の価格評価式であるブラック・ショールズの公式を導出しよう．
(1) 任意の実数 $\alpha$ に対して，

$$\Phi(\alpha) + \Phi(-\alpha) = 1$$

が成立することを示せ．ただし，

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt$$

であり，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt = 1$$

を用いてよい．

(2) 行使価格が同じ $K$ のコールオプションとプットオプションの間にはプット・コール・パリティ

$$C_0 - P_0 + K\exp(-r^*Nh) = S_0$$

が成立することを利用して，0 時点の価格は

$$P_0 = K\exp(-r^*Nh)\Phi(\sigma\sqrt{Nh} - d_0) - S_0\Phi(-d_0)$$

となることを示せ．ただし，

$$d_0 = \frac{\log(S_0/K) + (r^* + \sigma^2/2)Nh}{\sigma\sqrt{Nh}}$$

である．