教養科目／B 自然の摂理の探求

2026 年度 統計学（集中１期）

第６回

2．5　確率変数

例 2.10

1 枚の歪みのないコインを投げるとき，表が出たら $X=1$, 裏が出たら $X=0$ とする．

X の値	0	1	合計
確率	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

例 2.11

1 つの歪みのないサイコロを投げるとき，出る目の数 Y とする．

Y の値	1	2	3	4	5	6	合計
確率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

これらの例の X, Y のように確率的に変動する数のことを**確率変数**という．

確率変数

X の値	0	1	合計
確率	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Y の値	1	2	3	4	5	6	合計
確率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

これらの例の X, Y のように確率的に変動する数のことを**確率変数**という.
特に，確率変数のとる値がとびとびの値をとるとき，**離散型確率変数**という.

注意

確率変数は通常の変数と区別するため，大文字 X, Y 等を用いる.
これに対して，通常の変数は小文字 x, y 等を用いる.

２．６ 離散型確率分布

X がある値をとる確率の表し方

一般に，確率変数 X のとる値が $x_1, x_2, \cdots, x_n$ であるとき，X が 1 つの値 x_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ をとる確率を

$$\Pr(X = x_i)$$

と表す．

例 2.10 の場合,

$X = 1$ となる確率は $\frac{1}{2}$, $X = 0$ となる確率も $\frac{1}{2}$.

⇩

$$\Pr(X = 1) = \frac{1}{2}, \ \Pr(X = 0) = \frac{1}{2}.$$

２．６　離散型確率分布

X がある範囲にある確率の表し方

X の値が a 以上 b 以下である確率を

$$\Pr(a \leq X \leq b)$$

と表す.

例 2.10 の場合,

$$\Pr(0 \leq X \leq 1) = \Pr(X = 0) + \Pr(X = 1) = 1,$$

$$\Pr\left(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2}\right) = \Pr(X = 0) = \frac{1}{2}$$

表 2.2

X の値	0	1	合計
確率	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

２．６　離散型確率分布

・確率関数

確率変数 X のとる値が $x_1, x_2, \cdots, x_n$ であるとする．X が 1 つの値 x をとる確率を

$$P(x) = \Pr(X = x) \ (x = x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

と表す．$P(x)$ を**確率関数**という．

・確率分布

以下の表のような離散型確率変数のとる値と確率をまとめて**離散型確率分布**，または単に**離散型分布**といい，確率変数 X はこの**確率分布に従う**という．

X の値	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	合計
確率	$P(x_1)$	$P(x_2)$	$\cdots$	$P(x_n)$	1

離散型確率分布は確率関数によって決まる．

離散型の確率関数、確率分布 （例　２．１０）

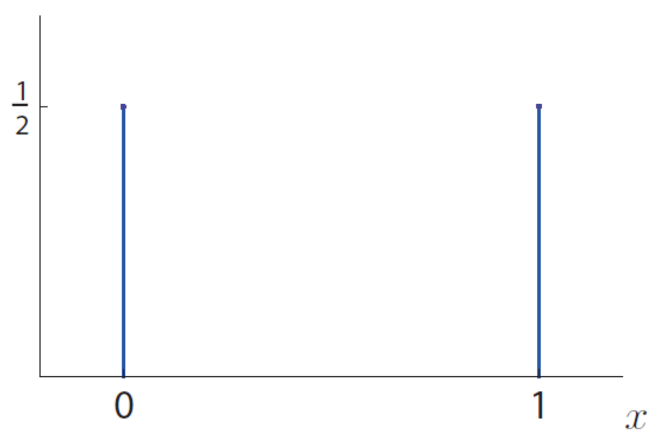
・例 **2.10** の確率関数

$$P(x) = \frac{1}{2} \quad (x = 0, 1)$$

・例 **2.10** の確率分布

X の値	0	1	合計
確率	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

・例 **2.10** の確率分布のグラフ



離散型の確率関数、確率分布 （例　２．１１）

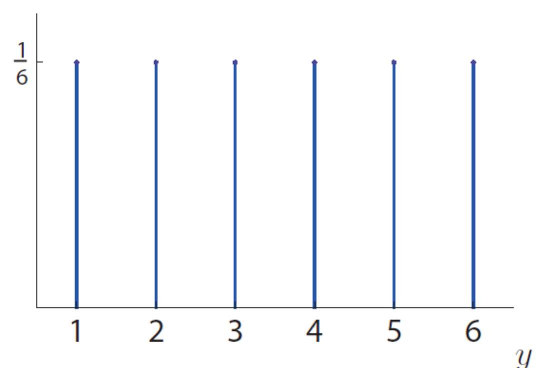
・例 **2.11** の確率関数

$$P(y) = \frac{1}{6} \quad (y = 1, 2, \cdots, 6)$$

・例 **2.11** の確率分布

Y の値	1	2	3	4	5	6	合計
確率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

・例 **2.11** の確率分布のグラフ



２．６　離散型確率分布

・例 **2.10** の確率関数

$$P(x) = \frac{1}{2} \quad (x = 0, 1) \qquad\qquad P(0) + P(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

・例 **2.11** の確率関数

$$P(y) = \frac{1}{6} \quad (y = 1, 2, \cdots, 6) \qquad P(1) + \cdots + P(6) = \frac{1}{6} \times 6 = 1$$

公式 2.5.

確率変数 X のとる値が $x_1, x_2, \cdots, x_n$ のとき，X の確率関数 $P(x)$ は次の (1), (2) を満たす.

(1) $P(x_1) > 0, \quad P(x_2) > 0, \quad \cdots, \quad P(x_n) > 0.$

(2) $P(x_1) + P(x_2) + \cdots + P(x_n) = 1.$

２．７　2項分布

例 2.12

1 枚の歪みのないコインを 2 回投げる試行を考える.

$$\begin{cases} X_1 : 1 \text{ 投目に表が出たら } 1, \text{裏が出たら } 0. \\ X_2 : 2 \text{ 投目に表が出たら } 1, \text{裏が出たら } 0. \end{cases}$$

コインを 2 回投げた時に表の出る回数を X とすると,

$$X = X_1 + X_2.$$

⇓

確率変数 X の確率分布は？

２．７　2項分布

(1) $X = 0$

$$X_1 = 0, X_2 = 0.$$

$$\Pr(X = 0) = \Pr(X_1 = 0, X_2 = 0) = \Pr(X_1 = 0)\Pr(X_2 = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

(2) $X = 1$

$$X_1 = 1, X_2 = 0 \quad or \quad X_1 = 0, X_2 = 1.$$

$$\begin{aligned} \Pr(X = 1) &= \Pr(X_1 = 1, X_2 = 0) + \Pr(X_1 = 0, X_2 = 1) \\ &= \Pr(X_1 = 1)\Pr(X_2 = 0) + \Pr(X_1 = 0)\Pr(X_2 = 1) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(3) $X = 2$

$$X_1 = 1, X_2 = 1.$$

$$\Pr(X = 2) = \Pr(X_1 = 1)\Pr(X_2 = 1) = \frac{1}{4}$$

2．7　2項分布

X の値	X_1	X_2	確率
0	0	0	$\frac{1}{4}$
1	0	1	$\frac{1}{4}$
1	1	0	$\frac{1}{4}$
2	1	1	$\frac{1}{4}$

$$P(0) = \frac{1}{4}$$

$$P(1) = \frac{1}{2}$$

$$P(2) = \frac{1}{4}$$

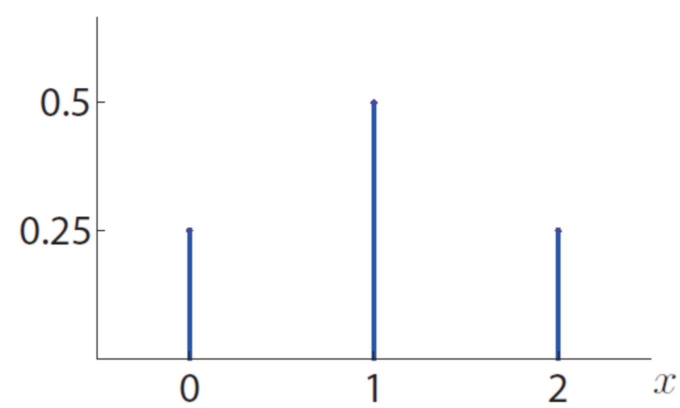
X の確率分布

X の値	0	1	2	合計
確率	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

X の確率関数

$$P(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4} & (x = 0, 2), \\ \dfrac{1}{2} & (x = 1) \end{cases}$$

X の確率分布のグラフ



2．7　2項分布

例 2.12 (続)

1 枚の歪みのないコインを 2 回投げる試行を考える.

$$\begin{cases} X_1 : 1\text{ 投目に表が出たら } 1, \text{裏が出たら } 0. \\ X_2 : 2\text{ 投目に表が出たら } 1, \text{裏が出たら } 0. \end{cases}$$

コインを 2 回投げた時に表の出る回数を X とすると, $X = X_1 + X_2$.

⇩

表が出る確率 p $(0 < p < 1)$, 裏が出る確率 $1 - p$ のコインを n 回投げる試行を考える.

$$\begin{cases} X_1 : 1\text{ 投目に表が出たら } 1, \text{裏が出たら } 0. \\ X_2 : 2\text{ 投目に表が出たら } 1, \text{裏が出たら } 0. \\ \qquad\vdots \\ X_n : n\text{ 投目に表が出たら } 1, \text{裏が出たら } 0. \end{cases}$$

コインを n 回投げた時に表の出る回数を X とすると,

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

2．7　2項分布

・まず, $n=4, x=2$ の場合を考える.

コインを 4 回投げた時に表の出る回数を X とすると,

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4.$$

4 回中表が 2 回出る確率, つまり, $\Pr(X=2)$ を考える.

・$X=2$ となる X_1, X_2, X_3, X_4 の組合せの数

X_1	X_2	X_3	X_4
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1

$X=2$ なので, X_1, X_2, X_3, X_4 の中で,

2 個が 1 であればよいので,

「$X=2$ となる X_1, X_2, X_3, X_4 の組合せの数」

||

「X_1, X_2, X_3, X_4 から 2 個の異なる要素を選ぶ組合せの数」

つまり, ${}_4\mathrm{C}_2 = 6$.

２．７　2項分布

・$X = 2$ となる各 X_1, X_2, X_3, X_4 の起こる確率

X_1	X_2	X_3	X_4	
1	1	0	0	$p \times p \times (1-p) \times (1-p)$
1	0	1	0	$p \times (1-p) \times p \times (1-p)$
1	0	0	1	$p \times (1-p) \times (1-p) \times p$
0	1	1	0	$(1-p) \times p \times p \times (1-p)$
0	1	0	1	$(1-p) \times p \times (1-p) \times p$
0	0	1	1	$(1-p) \times (1-p) \times p \times p$

$p^2(1-p)^2$

1 が 2 回，0 が 2 回現れていることから，それぞれの組合せの起こる確率は $p^2(1-p)^2$.

2．7　2項分布

・$X=2$ となる X_1, X_2, X_3, X_4 の組合せの数 ${}_4\mathrm{C}_2 = 6.$

・$X=2$ となる各 X_1, X_2, X_3, X_4 の起こる確率：$p^2(1-p)^2$

$$\Pr(X=2) = {}_4\mathrm{C}_2\, p^2(1-p)^2$$

一般の n, x のときでも考え方は同じ.

2．7　2項分布

コインを n 回投げた時に表の出る回数を X とすると,

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

n 回中表が x 回出る確率, つまり, $\Pr(X = x)$ を考える.

・$X = x$ となる $X_1, X_2, \cdots, X_n$ の組合せの数

$X = x$ なので, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ の中で, x 個が 1 であればよいので,

「$X = x$ となる $X_1, X_2, \ldots, X_n$ の組合せの数」

$=$ 「$X_1, X_2, \cdots, X_n$ から x 個の異なる要素を選ぶ組合せの数」

つまり, ${}_n\mathrm{C}_x$.

・$X = x$ となる各 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ の起こる確率

1 が x 回, 0 が $n - x$ 回現れていることから,

$$p^x(1-p)^{n-x}$$

2．7　2項分布

・$X=x$ となる $X_1, X_2, \cdots, X_n$ の組合せの数　${}_n\mathrm{C}_x$.

・$X=x$ となる $X_1, X_2, \ldots, X_n$ のそれぞれの起こる確率：$p^x(1-p)^{n-x}$

・$\Pr(X=x)$

$$P(x) = {}_n\mathrm{C}_x\, p^x(1-p)^{n-x} \qquad (x=0,1,\cdots,n)$$

・**2 項分布**

X の確率関数 $P(x)$ が

$$P(x) = {}_n\mathrm{C}_x\, p^x(1-p)^{n-x} \qquad (x=0,1,\cdots,n)$$

となるような確率分布を**２項分布**とよび，$\mathrm{B}(n,p)$ と表す.

・また，このとき，X は**２項分布 $\mathbf{B}(n,p)$ に従う**といい，$X \sim \mathrm{B}(n,p)$ と表す.

2．7　2項分布

・２項分布に従う確率変数の例

- コイン投げ (表が出れば 1, 裏が出れば 0)
- 生まれてくる子の性別 (男であれば 1, 女であれば 0)
- 病気の罹患 (病気にかかっていれば 1, かかっていなければ 0)
- 薬の効果の有無 (薬の効果があれば 1, なければ 0)
- 生物の生死 (生きていれば 1, 死ねば 0)
- 意見の賛否 (賛成であれば 1, 反対であれば 0)
- 試合の勝ち負け (勝てば 1, 負ければ 0)

2．7　2項分布

例 2.13

日本における男女の出生比率はおよそ $51:49$ である．ある夫婦には 4 人の子供がいることがわかっている．X をこの夫婦の男児の数とし，男児が生まれる確率を 0.51 とすると，X は 2 項分布 $\mathrm{B}(4, 0.51)$ に従う．

男児の数が 0 人である確率は，

$$\Pr(X = 0) = {}_4\mathrm{C}_0\, 0.51^0 (1 - 0.51)^{4-0} \fallingdotseq 0.058$$

男児の数が 1 人である確率は，

$$\Pr(X = 1) = {}_4\mathrm{C}_1\, 0.51^1 (1 - 0.51)^{4-1} \fallingdotseq 0.240$$

2．7　2項分布

例 2.13

日本における男女の出生比率はおよそ 51 : 49 である．ある夫婦には 4 人の子供がいることがわかっている．X をこの夫婦の男児の数とし, 男児が生まれる確率を 0.51 とすると, X は 2 項分布 B(4, 0.51) に従う．

X の値	0	1	2	3	4	合計
確率	0.058	0.240	0.375	0.260	0.068	1

注意

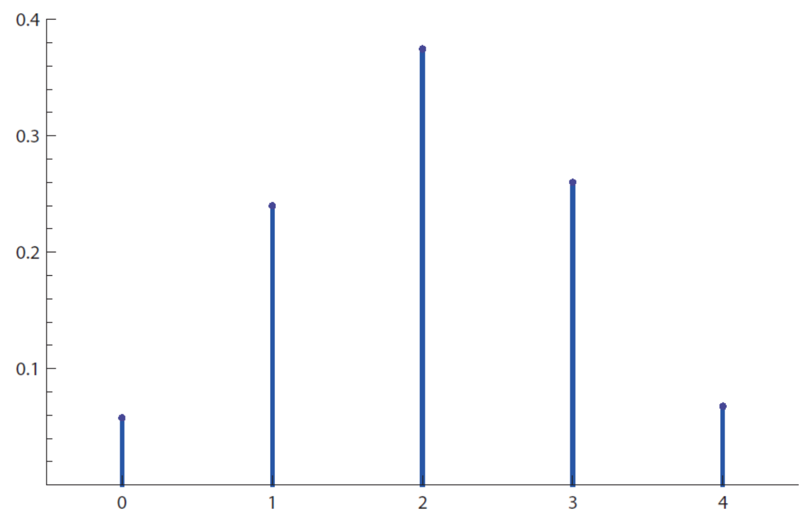
0.058, 0.240, 0.375, 0.260, 0.068 は小数第 4 位を四捨五入した近似値で，これらの値の合計は必ずしも 1 とはならない．(実際合計は 1.001．)
しかし，厳密な値を用いた合計は 1 になる．

2．7　2項分布

例 2.13

日本における男女の出生比率はおよそ 51 : 49 である．ある夫婦には 4 人の子供がいることがわかっている．X をこの夫婦の男児の数とし，男児が生まれる確率を 0.51 とすると，X は 2 項分布 B$(4, 0.51)$ に従う．

X の値	0	1	2	3	4	合計
確率	0.058	0.240	0.375	0.260	0.068	1



2．8　連続型確率分布

なぜ連続型の確率変数を扱う必要があるのか？

・例として身長のデータを考える．ある人の本当の身長を知ることは出来ないが，「172.45 cm 以上，172.55 cm 未満である」とうことは確からしいことである．

・身長のデータは，連続型データとして考える．

連続型データは**区間の確率**を与える必要があるが，どのように与えられるのか?

階 級	級中央値	度 数
$155 \sim 159$	157	6
$159 \sim 163$	161	34
$163 \sim 167$	165	122
$167 \sim 171$	169	251
$171 \sim 175$	173	305
$175 \sim 179$	177	212
$179 \sim 183$	181	56
$183 \sim 187$	185	14
計	—	1000

男子学生1000人の身長の度数分布表

1000 人の男子学生をランダムに選び，身長を測定した結果を度数分布表にまとめたものが以下の表 2.9 である．

表 2.9　男子学生 1000 人の身長の度数分布表

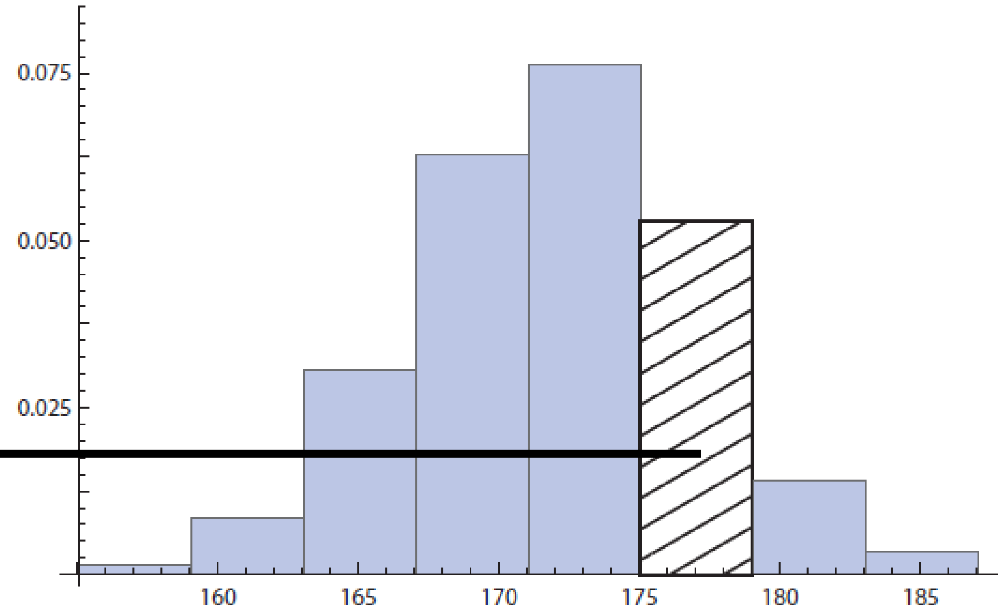
階 級	級中央値	度 数	相対度数
155 ～ 159	157	6	0.006
159 ～ 163	161	34	0.034
163 ～ 167	165	122	0.122
167 ～ 171	169	251	0.251
171 ～ 175	173	305	0.305
175 ～ 179	177	212	0.212
179 ～ 183	181	56	0.056
183 ～ 187	185	14	0.014
計	—	1000	1

相対度数の総和は 1.

相対度数のヒストグラムを作成する．

相対度数のヒストグラム

階 級	相対度数
155 ～ 159	0.006
159 ～ 163	0.034
163 ～ 167	0.122
167 ～ 171	0.251
171 ～ 175	0.305
175 ～ 179	0.212
179 ～ 183	0.056
183 ～ 187	0.014
計	1

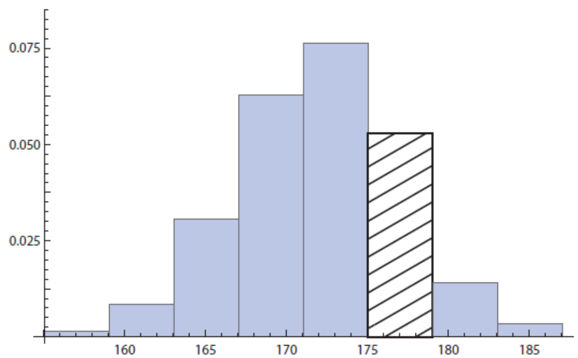


各長方形の面積：対応する階級の相対度数.

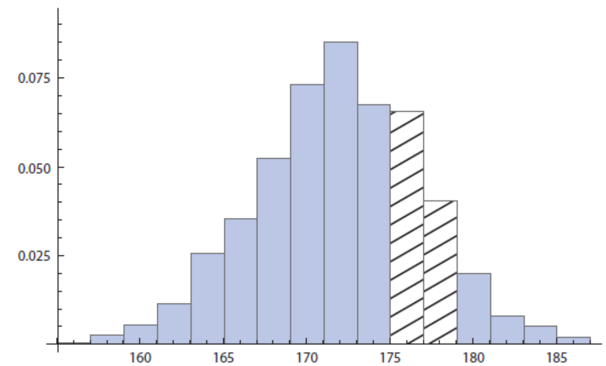
各長方形の面積 (相対度数) の総和は 1.

相対度数のヒストグラム

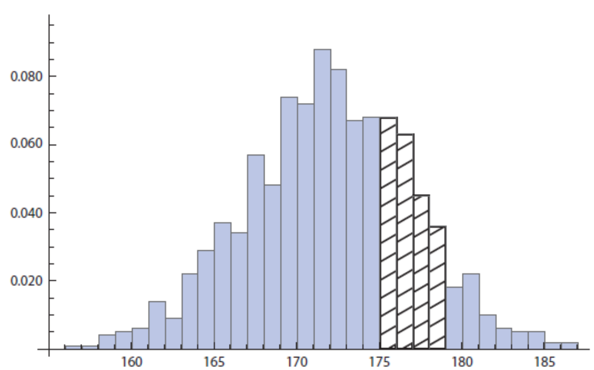
階級の幅を狭めていき，データの個数を十分大きくすると，ヒストグラムはおよそ図 **2.12(iv)** にある曲線 $f(x)$ に近づくことが予想される．



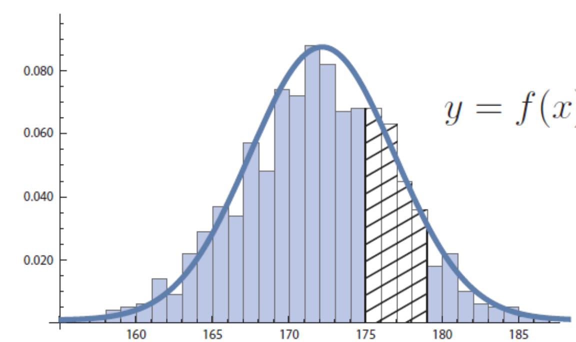
(i) 階級の幅が 4 cm の場合



(ii) 階級の幅が 2 cm の場合



(iii) 階級の幅が 1 cm の場合



(iv) 曲線 $y = f(x)$

ある区間に属する確率

身長 X が a 以上 b 未満である確率

$$\Pr(a \leq X < b)$$

を $y = f(x)$ と x 軸，直線 $x = a$, 直線 $x = b$ によって囲まれた図形（図 2.13 の斜線部分）の面積で与える．

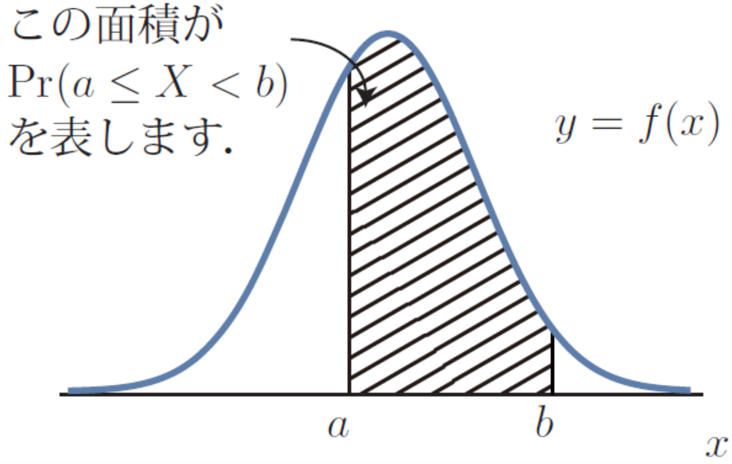


図 2.13　図 2.12 (iv) の $y = f(x)$

このように確率を与えることによって，連続型データを確率変数と考えることが出来る．これを連続型確率変数という．

確率密度関数

X を連続型確率変数とすると，$a \leq X < b$ となる確率 $\mathbf{Pr}(a \leq X < b)$ は**適当な関数** $f(x)$ を用いて，曲線 $y = f(x)$ と x 軸，直線 $x = a$, 直線 $x = b$ によって囲まれた図形の面積で与えられる.

・X の確率密度関数

確率変数 X に対して

$$\Pr(a \leq X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

となる $f(x)$ を X の**確率密度関数**という.

・連続型確率分布

連続型確率変数が含まれる区間と確率をまとめて**連続型確率分布**，または単に**連続型分布**といい，確率変数 X はこの**確率分布に従う**という.

連続型確率分布は確率密度関数によって決まる.

確率密度関数の性質 （公式 2.6）

連続型確率変数 X がとり得る値の範囲を区間 $[\alpha, \beta]$ とする．このとき, X の確率密度関数 $f(x)$ は次の (1), (2), (3) を満たす.

(1) すべての x に対して

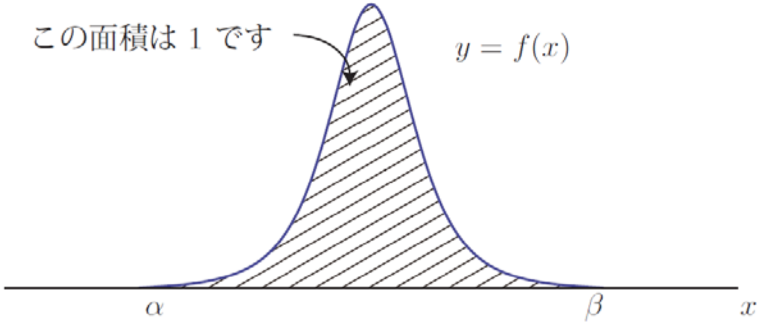
$$f(x) \geq 0.$$

(2) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸，直線 $x = \alpha$, 直線 $x = \beta$ によって囲まれた図形の面積は 1 になる．式で書くと

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 1.$$

(3) $\alpha \leq a < b \leq \beta$ に対して,

$$\Pr(a \leq X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx.$$



確率密度関数の性質（注意２．１）

X が連続型確率変数のとき，すべての a に対して，

$$\Pr(X = a) = 0$$

となる.

なぜならば, 対応する面積が 0 であるから.

$$\Pr(a \leq X \leq b) = \Pr(a \leq X < b) = \Pr(a < X \leq b) = \Pr(a < X < b)$$

一様分布

例 2.14

ある駅では 3 分ごとに電車が発車します．A 君は電車の時刻表を確かめないで，ランダムに駅に向かいます．このとき，A 君の電車の待ち時間 X（分）を考えてみましょう．

A 君は電車の時刻表を確かめないで，ランダムに駅に向かうことから，

$$\Pr(0 \leq X < 1) = \Pr(1 \leq X < 2) = \Pr(2 \leq X < 3)$$

となり，$\Pr(0 \leq X < 1) + \Pr(1 \leq X < 2) + \Pr(2 \leq X < 3) = 1$ より，

$$\Pr(0 \leq X < 1) = \frac{1}{3}$$

また，

$$\Pr(0 \leq X < 2) = \Pr(0 \leq X < 1) + \Pr(1 \leq X < 2) = \frac{2}{3}.$$

一様分布

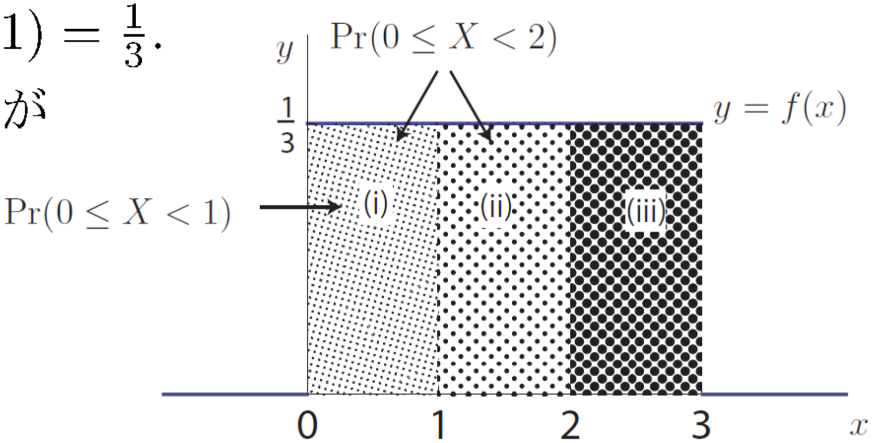
関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3} & (0 \leq x < 3), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

とすると，

$$\Pr(a \leq X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

- (i) の長方形の面積が $\Pr(0 \leq X < 1) = \frac{1}{3}$.
- (i) と (ii) をあわせた長方形の面積が $\Pr(0 \leq X < 2) = \frac{2}{3}$.

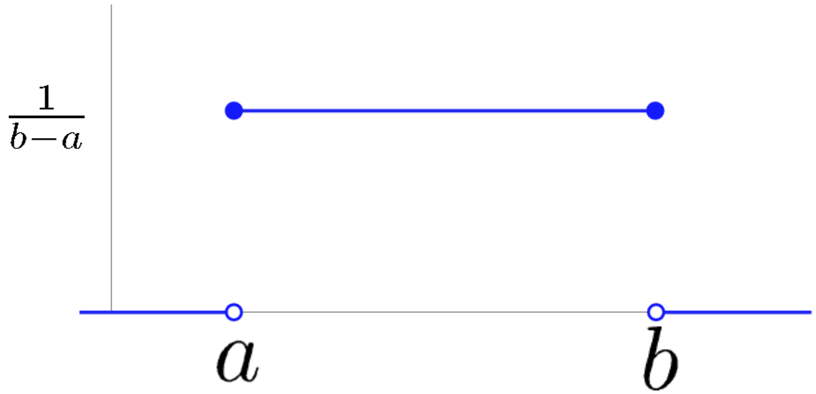


一様分布（一般）

連続型確率変数 X の確率密度関数が

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & (a \leq x \leq b), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

のとき，X の確率分布を $[a,b]$ 上の**一様分布**といい，X が一様分布に従うことを記号で $X \sim \mathrm{U}(a,b)$ と表す．



注意 2.1 より，x のとり得る値の範囲を $a < x < b$, $a \leq x < b$, $a < x \leq b$ と書いても構わないが，$a \leq x \leq b$ と書くことにする．

まとめ（1/3）

・**離散型確率変数**： とびとびの値をとる確率変数.

例 ： サイコロの目，コインの表裏など

・確率関数

確率変数 X のとる値が $x_1, x_2, \cdots, x_n$ であるとする. X が 1 つの値 x をとる確率を

$$P(x) = \Pr(X = x) \ (x = x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

と表す. $P(x)$ を**確率関数**という.

・確率分布

以下の表のような離散型確率変数のとる値と確率をまとめて**離散型確率分布**, または単に**離散型分布**といい，確率変数 X はこの**確率分布に従う**という.

X の値	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	合計
確率	$P(x_1)$	$P(x_2)$	$\cdots$	$P(x_n)$	1

まとめ（2/3）

・2 項分布

X の確率関数 $P(x)$ が

$$P(x) = {}_n\mathrm{C}_x\, p^x (1-p)^{n-x} \qquad (x = 0, 1, \cdots, n)$$

となるような確率分布を**２項分布**とよび，$\mathrm{B}(n,p)$ と表す．

・また，このとき，X は**２項分布 $\mathbf{B}(n,p)$ に従う**といい，$X \sim \mathrm{B}(n,p)$ と表す．

まとめ（3/3）

・**連続型確率変数**： 連続的な値をとる確率変数.

例 ： 時間や身長・体重など

・**連続型確率分布**：一様分布, 正規分布.

・一様分布

連続型確率変数 X の確率密度関数が

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & (a \leq x \leq b), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

のとき，X の確率分布を $[a, b]$ 上の**一様分布**といい，X が一様分布に従うことを記号で $X \sim \mathrm{U}(a, b)$ と表す.