教養科目／**B** 自然の摂理の探求

2026 年度 統計学（集中１期）

第７回

確率変数の種類

・**離散型確率変数**：　とびとびの値をとる確率変数.

例　：　サイコロの目など

・**連続型確率変数**：　連続的な値をとる確率変数.

例　：　時間や身長・体重など

２．９ 正規分布

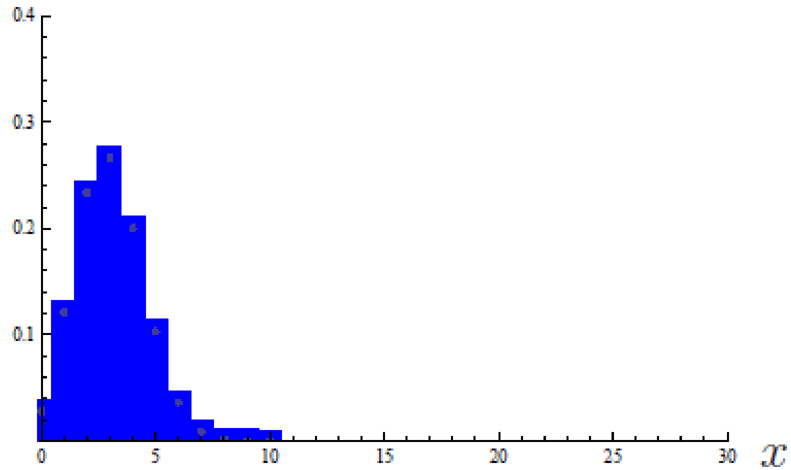
正規分布は次のような理由から統計学において中心的な役割を果たす確率分布である．

(i) 測定を行ったときに生じる誤差や身長等は正規分布に従うと考えられている.

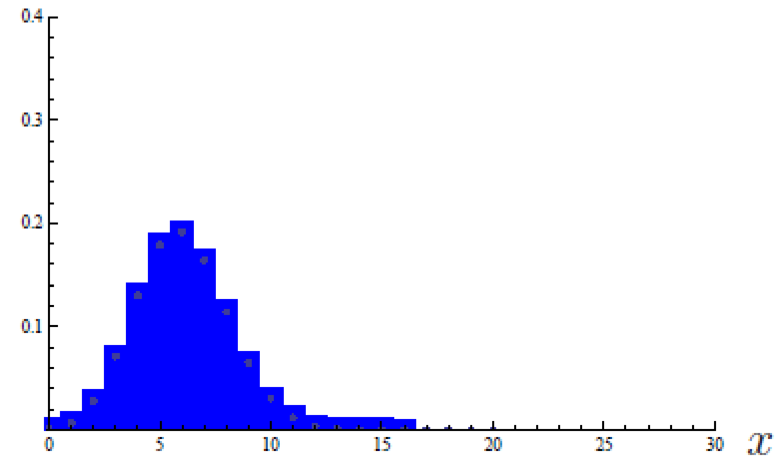
(ii) 後に述べる中心極限定理により確率変数の和はその個数が多ければ正規分布に近い分布に従う.

2項分布と正規分布

・**2** 項分布 $\mathrm{B}(n, 0.3)$ における n を変化させる.



(i) $n = 10$

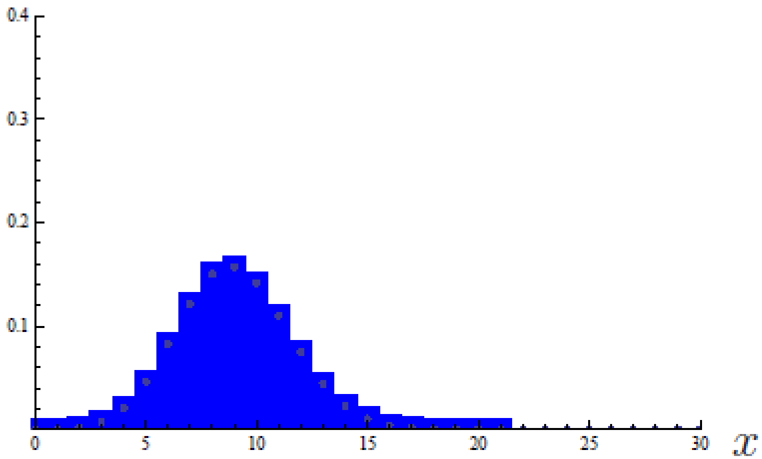


(ii) $n = 20$

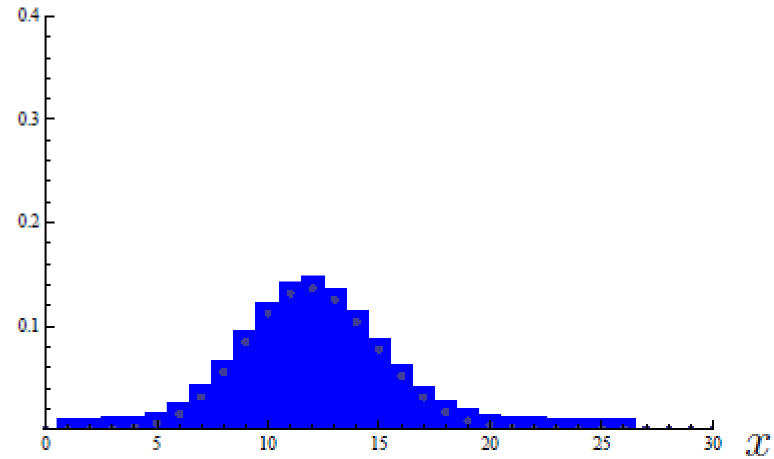
確率関数は本来棒グラフ（縦線）で描かれるが，ここでは横の長さが 1 の長方形で描いている.

2項分布と正規分布

・**2 項分布** $\mathrm{B}(n, 0.3)$ における n を変化させる.



(iii) $n = 30$

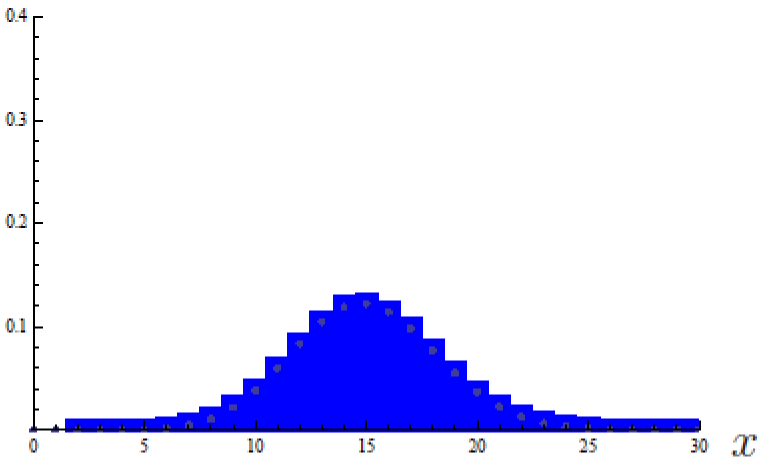


(iv) $n = 40$

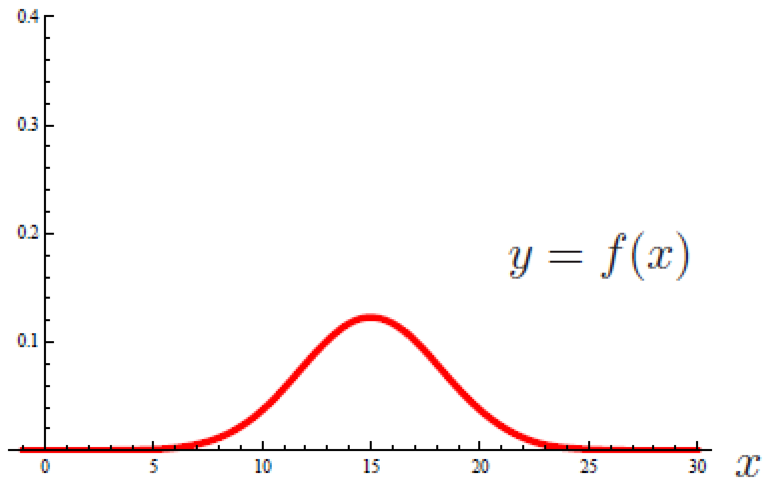
n が大きくなるにつれて，つりがね型へ変化している様子がわかる.

2項分布と正規分布

・2 項分布 $\mathrm{B}(n, 0.3)$ における n を変化させる.



(v) $n = 50$

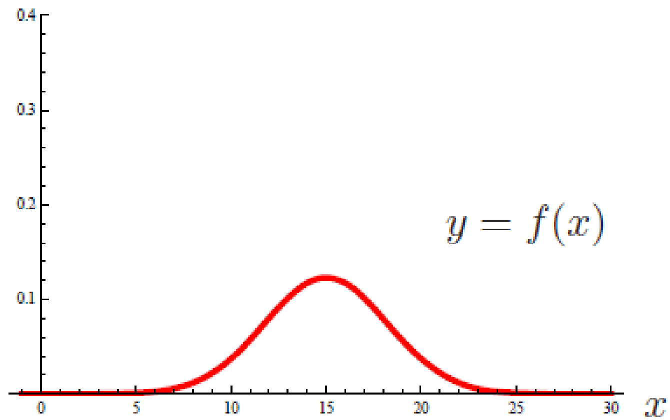


(vi) 曲線 $y = f(x)$

曲線 $y = f(x)$ とほぼ等しい.

正規分布

図 (vi) のような曲線 $y = f(x)$ を確率密度関数にもつ確率分布を**正規分布**という.



(vi) 曲線 $y = f(x)$

正規分布の確率密度関数を式で書くと

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (-\infty < x < \infty)$$

正規分布

正規分布の確率密度関数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (-\infty < x < \infty)$$

・$\pi = 3.14\cdots$ は円周率，$e = 2.71828\cdots$ は自然対数の底である．

・μ は実数全体を動くことが出来る定数，σ は正の実数全体を動くことが出来る定数．
（μ, σ はそれぞれ "ミュー"，"シグマ" と読む.）

・正規分布は記号で $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ と表す．

・正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ に従う確率変数の平均は μ, 分散は σ^2 となる．

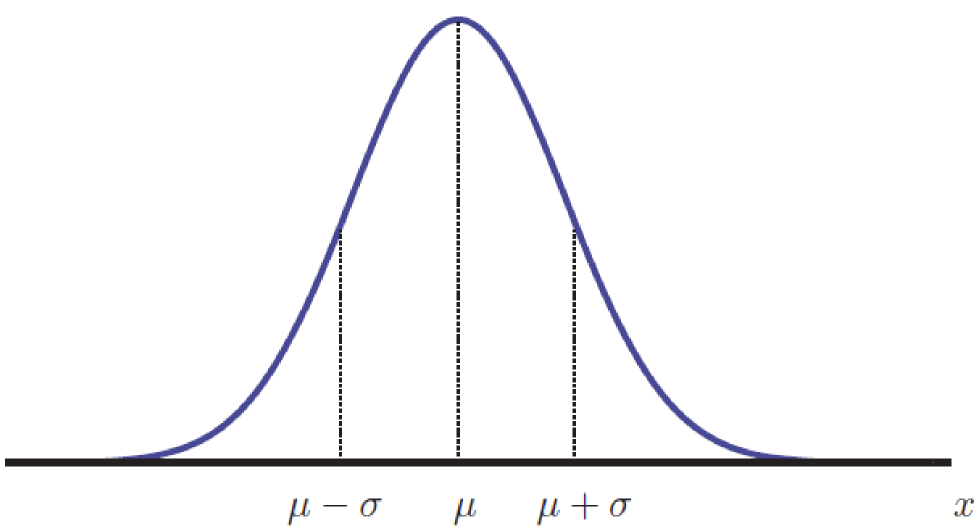
正規分布の性質（公式　２．７）

(1) すべての x に対して $f(x) > 0$.

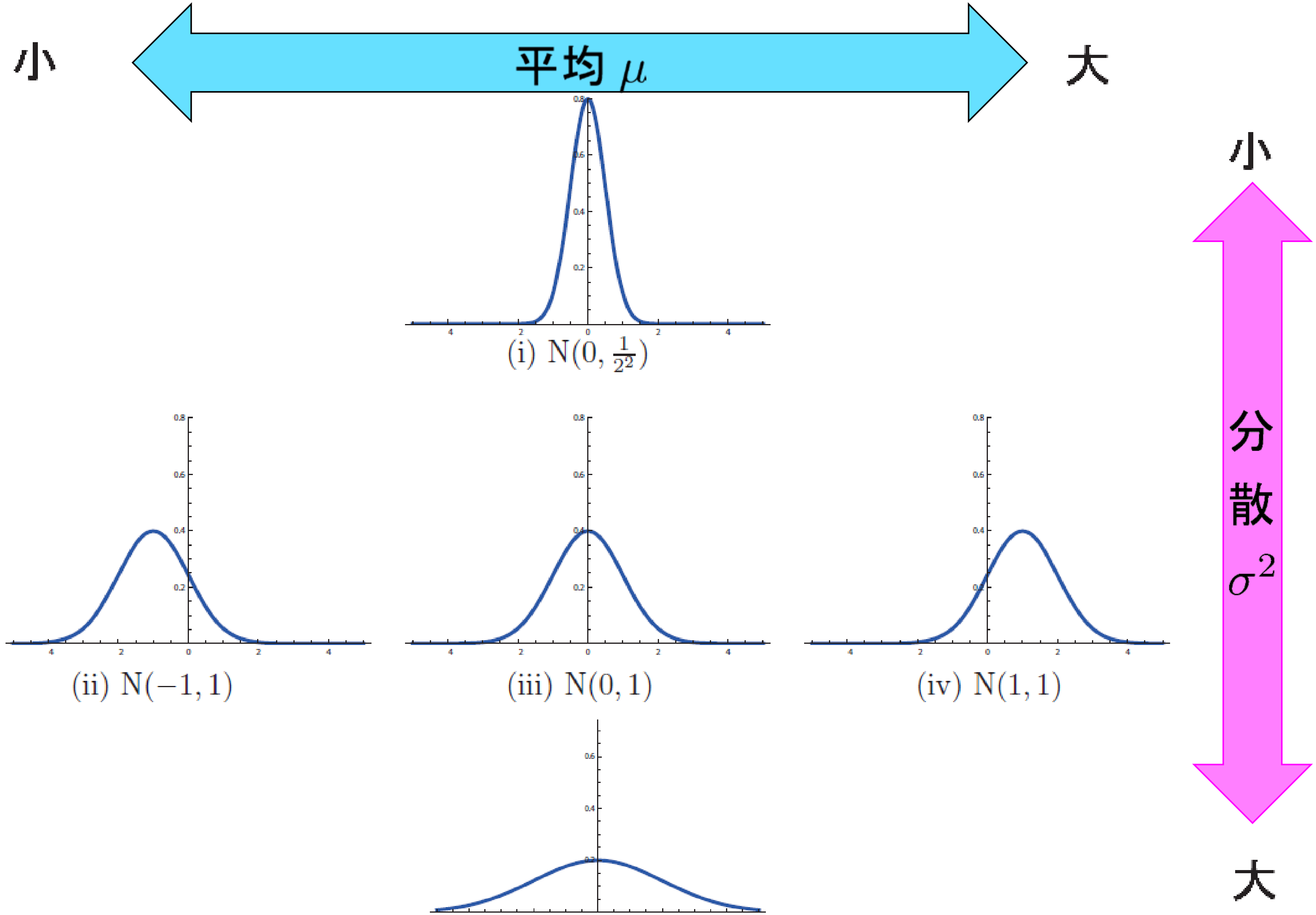
(2) $f(x)$ は $x = \mu$ を中心とし，左右対称.

(3) $f(x)$ は $x < \mu$ の部分では単調増加，$x > \mu$ の部分では単調減少.

(4) 変曲点の x 座標は $x = \mu \pm \sigma$.



正規分布の平均と分散の関係



(i) $\mathrm{N}(0, \frac{1}{2^2})$

(ii) $\mathrm{N}(-1, 1)$

(iii) $\mathrm{N}(0, 1)$

(iv) $\mathrm{N}(1, 1)$

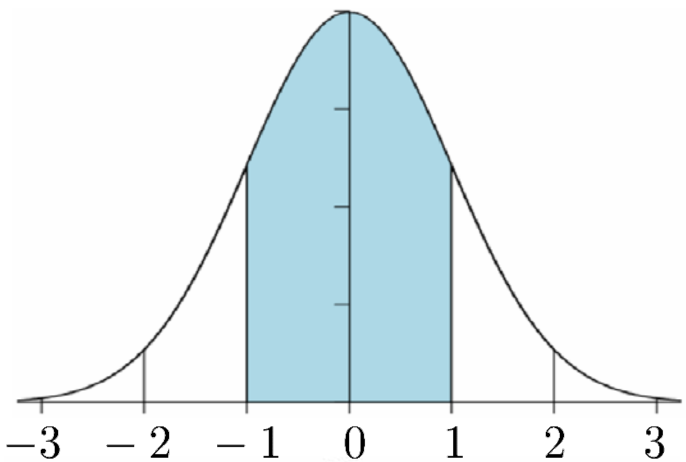
(v) $\mathrm{N}(0, 2^2)$

標準正規分布の確率密度関数

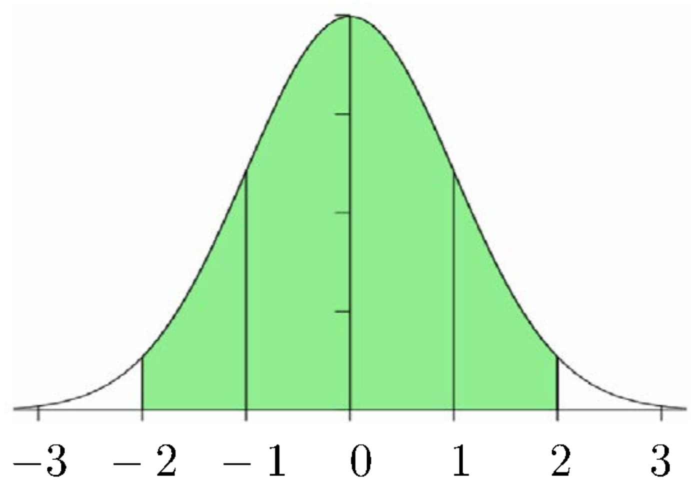
・標準正規分布 $\mathrm{N}(0,1)$ の確率密度関数 $\phi(x)$

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (-\infty < x < \infty)$$

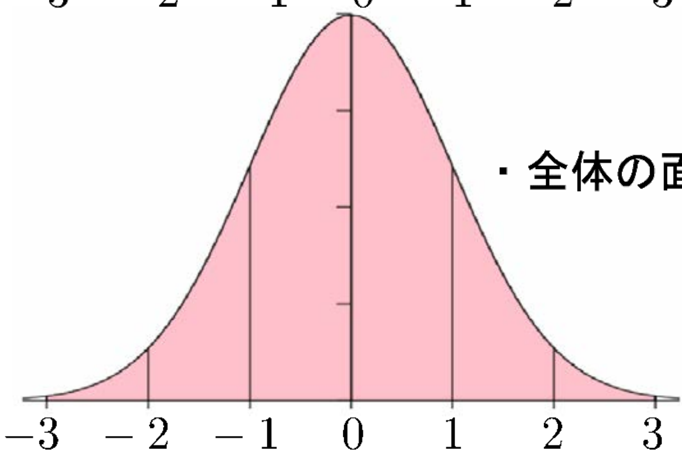
・全体の面積の 68.3%



・全体の面積の 95.5%



・全体の面積の 99.7%



後ほど確認.

- 正規分布表を用いて $\Pr(X \geq a)$ を求める.
- 正規分布表を用いて $\Pr(X \geq x) = \alpha$ を満たす x を求める.
- X が一般の正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ に従う場合の確率の計算方法.

標準正規分布の性質（公式 2.8）

(1) すべての a に対して，$\Pr(X > a) + \Pr(X < a) = 1.$

(2) すべての b に対して，$\Pr(X < -b) = \Pr(X > b).$

・注意“$<$”を“$\leq$”に，または，“$>$”を“$\geq$”に置き換えても確率は変わらない．連続型分布の一点をとる確率は0.

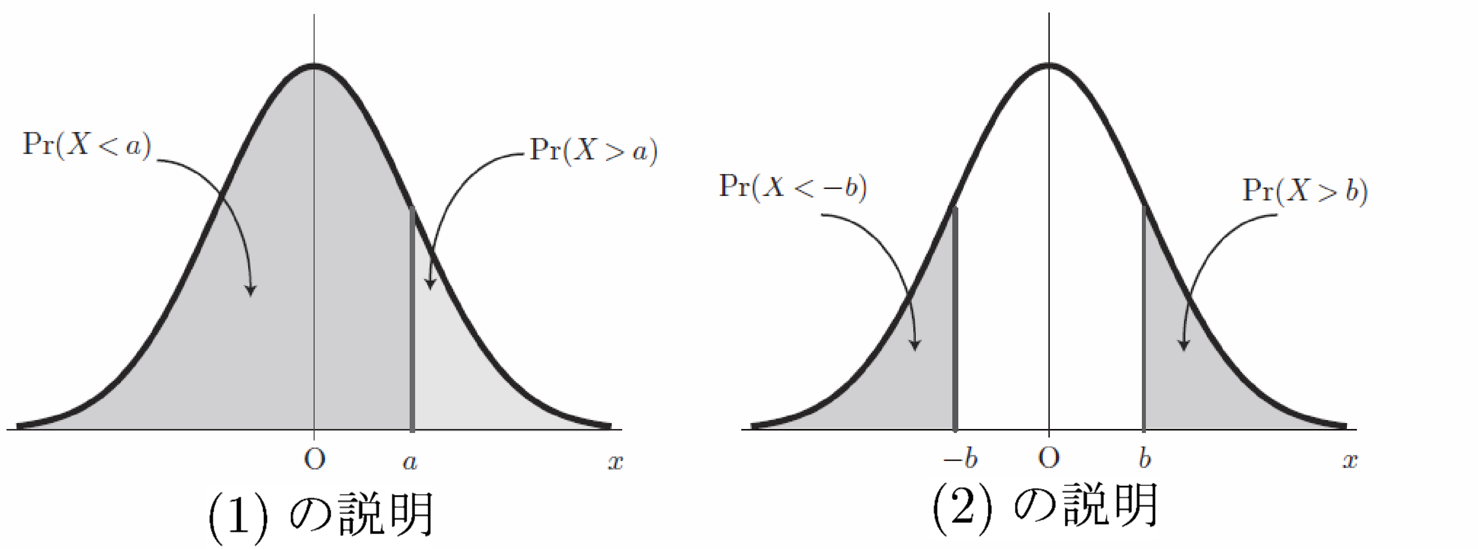


図 2.22　公式 2.8 の説明

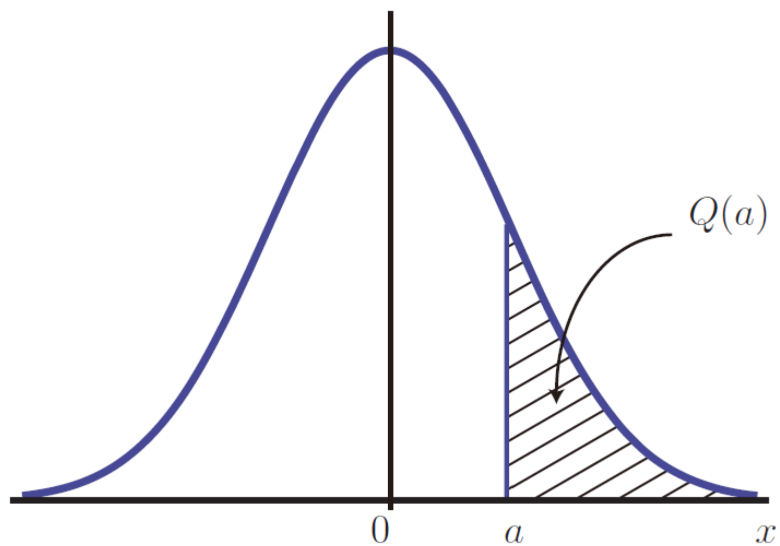
標準正規分布の上側確率

・上側確率

確率変数 $X \sim \mathrm{N}(0,1)$ とする．このとき，X が a 以上となる確率

$$\Pr(X \geq a)$$

を $Q(a)$ と表し，標準正規分布の上側確率という．



例 2. 15　上側確率

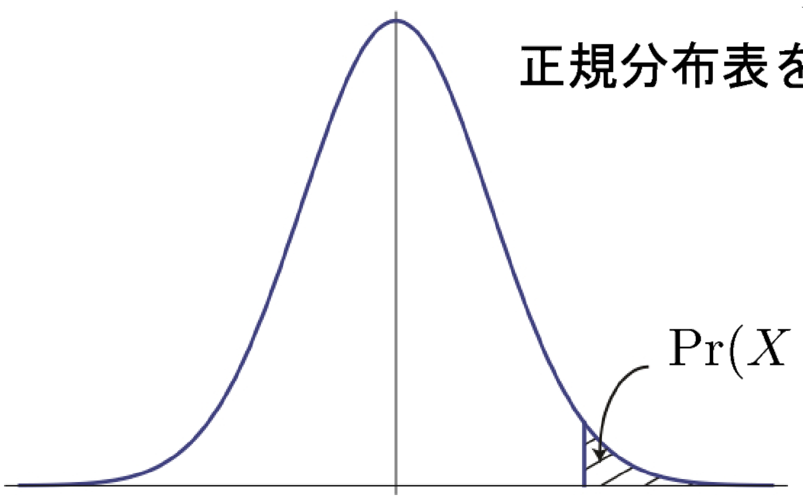
ある製品を製造する機械は長さが 100mm になるように設定されているが，すべての製品を 100mm ぴったりにすることは容易ではない．
実際には，誤差は標準正規分布に従っていると考える．

- 実際の製品の長さ:Y(mm)
- 誤差の分布:$X(=Y-100) \sim \mathrm{N}(0,1)$.

誤差が 2mm 以上になる確率は？

⇩

正規分布表を用いて求める．



$$\Pr(X \geq 2) = Q(2) = 0.02275.$$

正規分布表(数表1)の使い方

$\Pr(X \geq a) = Q(a).$

$Q(a)$:小数第1位までと小数第2位の交差した箇所.

例えば, $Q(1.23) = 0.1093.$

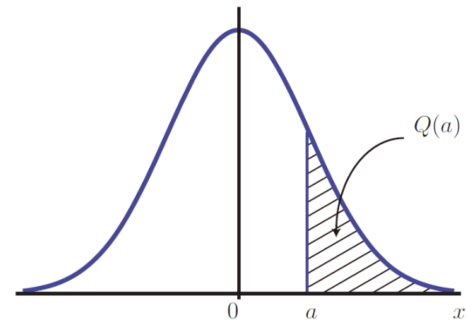


表 2.10　数表 1 の見方

a	$\cdots$	0.03	$\cdots$
$\vdots$			
1.2		0.1093	$\cdots$
$\vdots$		$\vdots$	

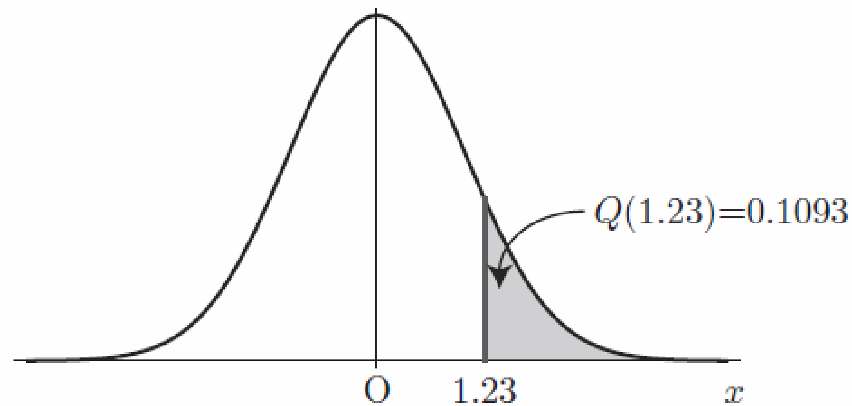
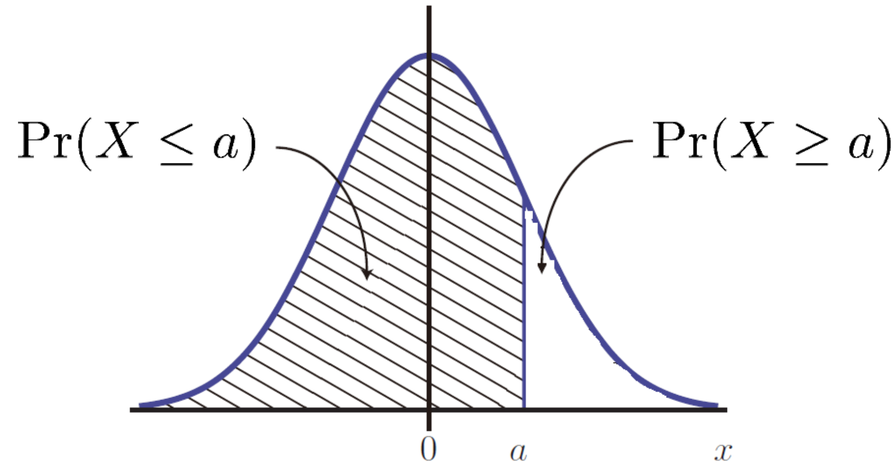


図 2.24　1.23 と $Q(1.23) = 0.1093$ の関係

正規分布表(数表1)の使い方

次のような確率を, 正規分布表のみで計算することはできるか?

- $a > 0$ のとき, $\Pr(X \leq a)$.

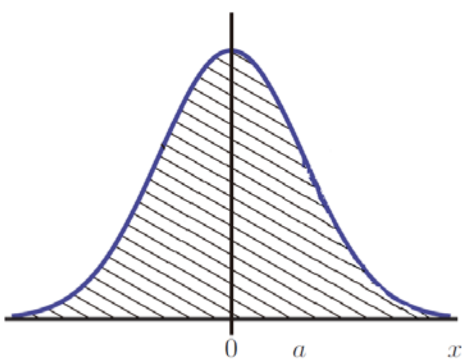


$$
\begin{aligned}
\Pr(X \leq a) &= 1 - \Pr(X \geq a) \\
&= 1 - Q(a)
\end{aligned}
$$

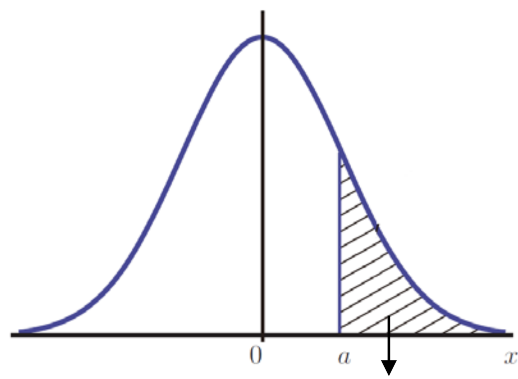
- **考え方**

$\Pr(-\infty < X < \infty) = 1$

$\Pr(X \geq a) = Q(a)$



から



を引く.

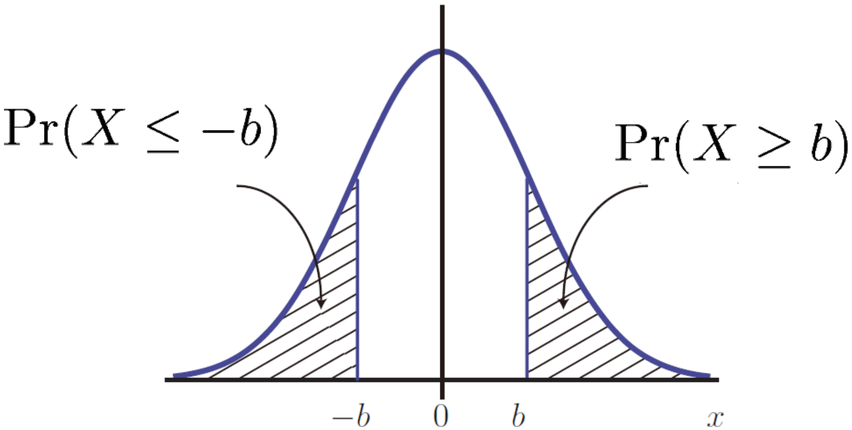
ここを正規分布表から求める.

正規分布表(数表1)の使い方

次のような確率を, 正規分布表のみで計算することはできるか?

・$b > 0$ のとき, $\Pr(X \leq -b)$.

$$\begin{aligned} \Pr(X \leq -b) &= \Pr(X \geq b) \\ &= Q(b) \end{aligned}$$



・**考え方**

標準正規分布の確率密度関数は, 原点に関して対称なので,

$$\Pr(X \geq b) = \Pr(X \leq -b)$$

正規分布表（数表1）

ある製品を製造する機械は長さが 100mm になるように設定されているが，すべての製品を 100mm ぴったりにすることは容易ではない．
実際には，誤差は標準正規分布に従っていると考える．

- 実際の製品の長さ:Y(mm)
- 誤差の分布:$X(= Y - 100) \sim \mathrm{N}(0, 1)$.

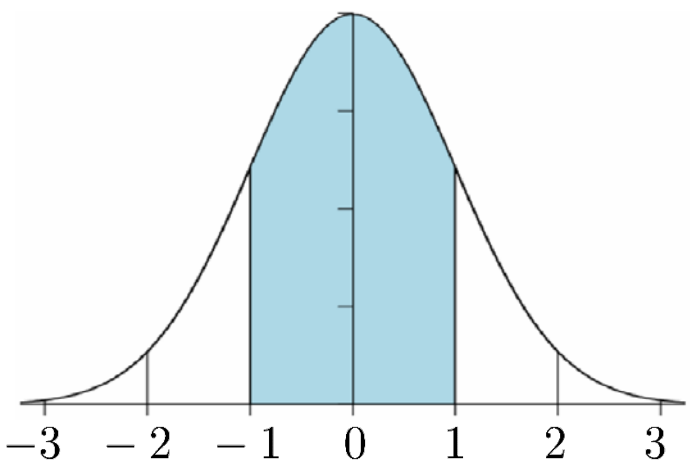
誤差が 2mm 以上になる確率は $\Pr(X \geq 2) = Q(2) = 0.02275$.

a	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
1.9	0.02872	0.02807	0.02743	0.02680	0.02619	0.02559	0.02500	0.02442	0.02385	0.02330
2.0	0.02275	0.02222	0.02169	0.02118	0.02068	0.02018	0.01970	0.01923	0.01876	0.01831
2.1	0.01786	0.01743	0.01700	0.01659	0.01618	0.01578	0.01539	0.01500	0.01463	0.01426
2.2	0.01390	0.01355	0.01321	0.01287	0.01255	0.01222	0.01191	0.01160	0.01130	0.01101

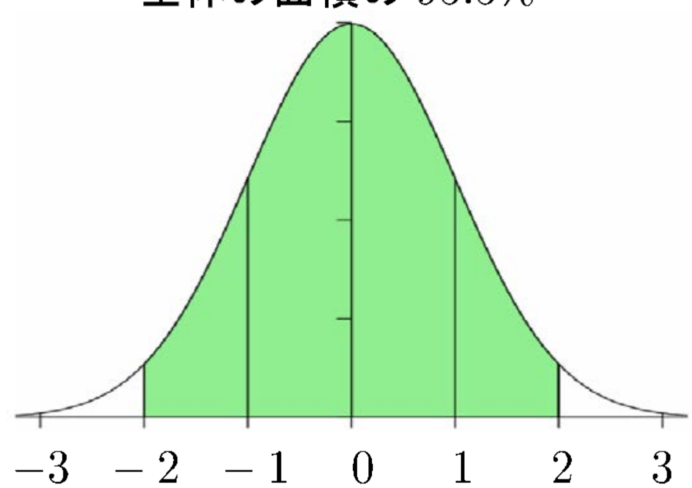
標準正規分布の確率密度関数

・以下の事実を, 確認する.

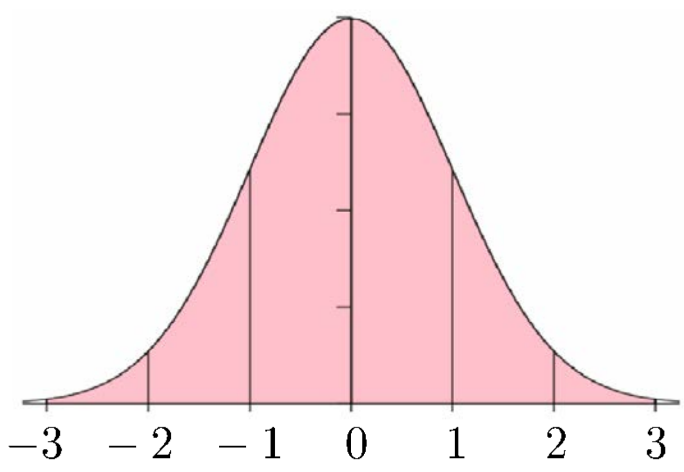
・全体の面積の 68.3%



・全体の面積の 95.5%



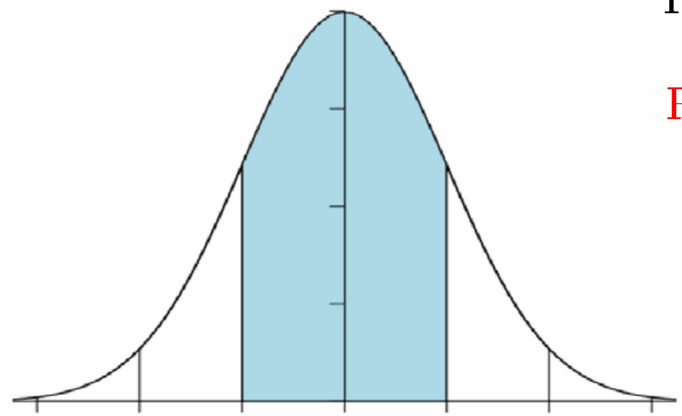
・全体の面積の 99.7%



標準正規分布の確率密度関数

・以下の事実を，確認する．

・全体の面積の 68.3%



$$\Pr(-1 \leq X \leq 1) = 1 - \{\Pr(X > 1) + \Pr(X < -1)\}$$

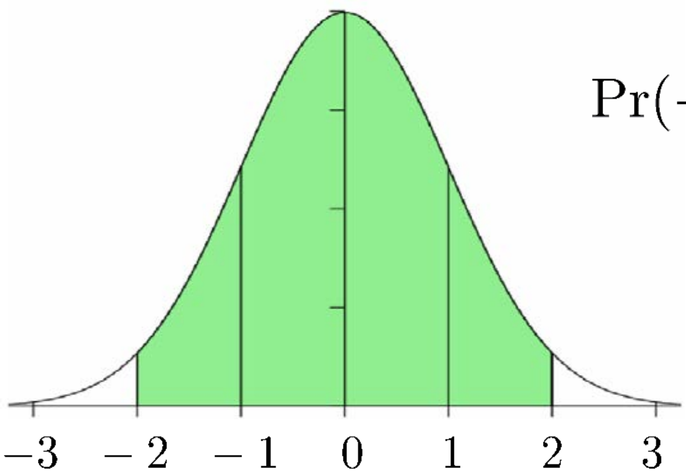
$$\Pr(X < -1) = \Pr(X > 1) = Q(1)$$

$$\begin{aligned} \Pr(-1 \leq X \leq 1) &= 1 - 2 \times Q(1) \\ &= 1 - 2 \times 0.1587 \fallingdotseq 0.683 \end{aligned}$$

標準正規分布の確率密度関数

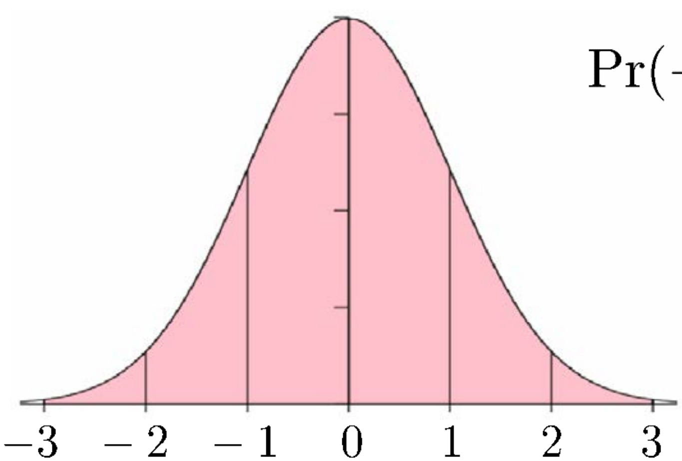
・以下の事実を，確認する．

・全体の面積の 95.5%



$$\begin{aligned}\Pr(-2 \le X \le 2) &= 1 - 2 \times Q(2) \\ &= 1 - 2 \times 0.02275 \fallingdotseq 0.955\end{aligned}$$

・全体の面積の 99.7%



$$\begin{aligned}\Pr(-3 \le X \le 3) &= 1 - 2 \times Q(3) \\ &= 1 - 2 \times 0.00135 \fallingdotseq 0.997\end{aligned}$$

- 正規分布表を用いて $\mathrm{Pr}(X \geq a)$ を求める.
- 正規分布表を用いて $\mathrm{Pr}(X \geq x) = \alpha$ を満たす x を求める.
- X が一般の正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ に従う場合の確率の計算方法.

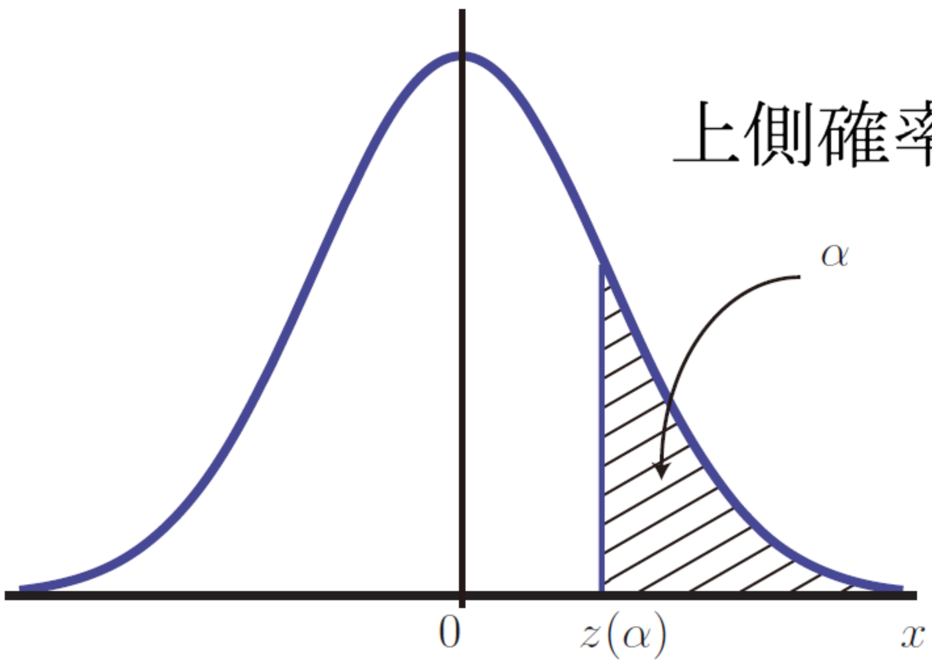
標準正規分布の上側α点

- 上側 α 点

確率変数 $X \sim \mathrm{N}(0,1)$ とする．このとき，$0 < \alpha < 1$ となる α に対して

$$\Pr(X \geq x) = \alpha$$

となる x を $z(\alpha)$ と表し，標準正規分布の上側 α 点という．



上側確率が α となる x のこと．

正規分布表(数表2)の使い方

$0 < \alpha < 0.5$ となる α に対して上側 α 点 $z(\alpha)$ を求めることができる.

・使い方

α の小数第 2 位までの値と小数第 3 位の値が交差した欄に $z(\alpha)$ の値がある.

表 2.12　数表 2 の見方

α	$\cdots$	0.005	$\cdots$
$\vdots$		$\vdots$	
0.02		1.9600	$\cdots$
$\vdots$		$\vdots$	

$$z(0.025) = 1.9600$$

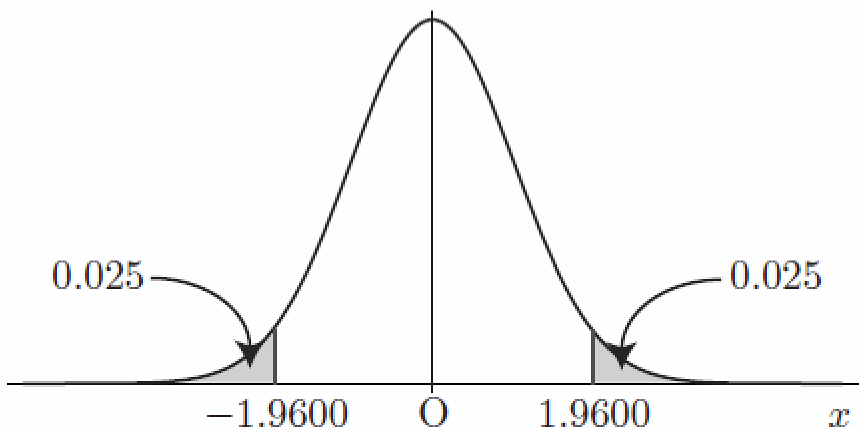


図 2.28　0.025 と $z(0.025)$ の関係

例　2. 16

あるスナック菓子を包装する機械は 1 袋あたりの内容量が a グラムになるように設定できます.
ただし，すべての袋を a グラムぴったりにすることはできません.
実際の内容量を Y グラムとする．誤差 X（$= Y - a$）$\sim \mathrm{N}(0,1)$ と考える.

内容量 Y が 100 グラム以上になる確率が 99% 以上になるように a を定めたい.

$$\Pr(Y \geq 100) \geq 0.99.$$

$$\Downarrow$$

$$\Pr(Y - a \geq 100 - a) \geq 0.99.$$

つまり, $\Pr(X \geq 100 - a) \geq 0.99$ を満たす a を求めたい.

例 2.16

つまり, $\Pr(X \geq 100 - a) \geq 0.99$ を満たす a を求めたい.

公式 2.8 を用いると,

$$\begin{aligned}\Pr(X \geq 100 - a) &= \Pr(X \leq a - 100) \\ &= 1 - \Pr(X \geq a - 100) \\ &= 1 - Q(a - 100)\end{aligned}$$

と表せる.

$1 - Q(a - 100) \geq 0.99$ だから,

$$Q(a - 100) \leq 0.01.$$

つまり, $a - 100 \geq z(0.01)$.

例 2.16

$1 - Q(a-100) \geq 0.99$ だから,

$$Q(a-100) \leq 0.01.$$

つまり, $a - 100 \geq z(0.01)$.

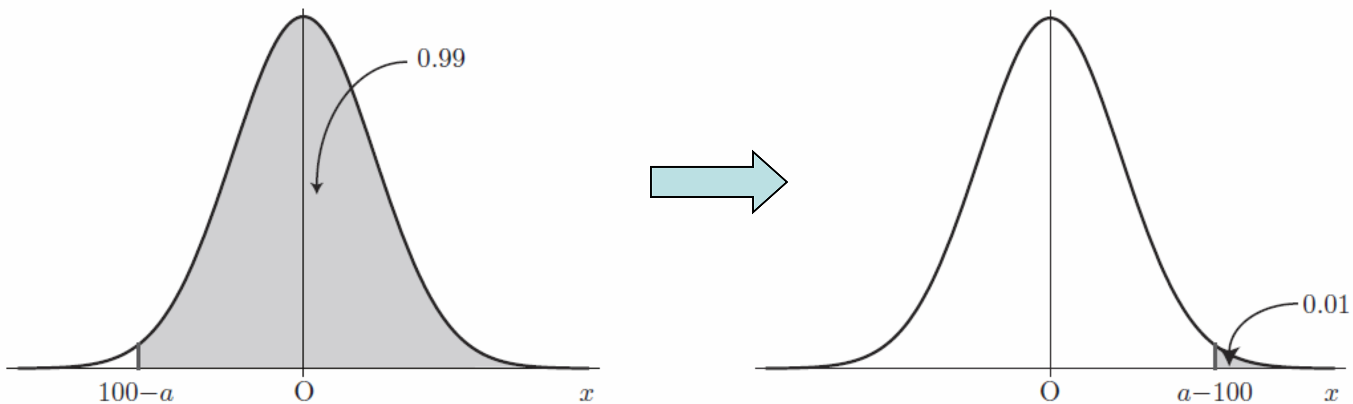


図 2.29 例 2.16 の確率密度関数

正規分布表 (数表 2) より, $z(0.01) = 2.3263$ なので,

$$a - 100 \geq 2.3263.$$

つまり, $a \geq 102.3263$ を満たす a が解である. 例えば, $a = 103$ グラム.

- 正規分布表を用いて $\Pr(X \geq a)$ を求める.
- 正規分布表を用いて $\Pr(X \geq x) = \alpha$ を満たす x を求める.
- X が一般の正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ に従う場合の確率の計算方法.

確率変数の基準化（公式　２．９）

$-\infty < \mu < \infty,\ \sigma > 0$ とする．$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.

$$\Pr(x_1 \leq X \leq x_2) = ?$$

ただし, $x_1 < x_2$ とする.

次のように, 式変形する.

$$\Pr(x_1 \leq X \leq x_2) = \Pr\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right)$$

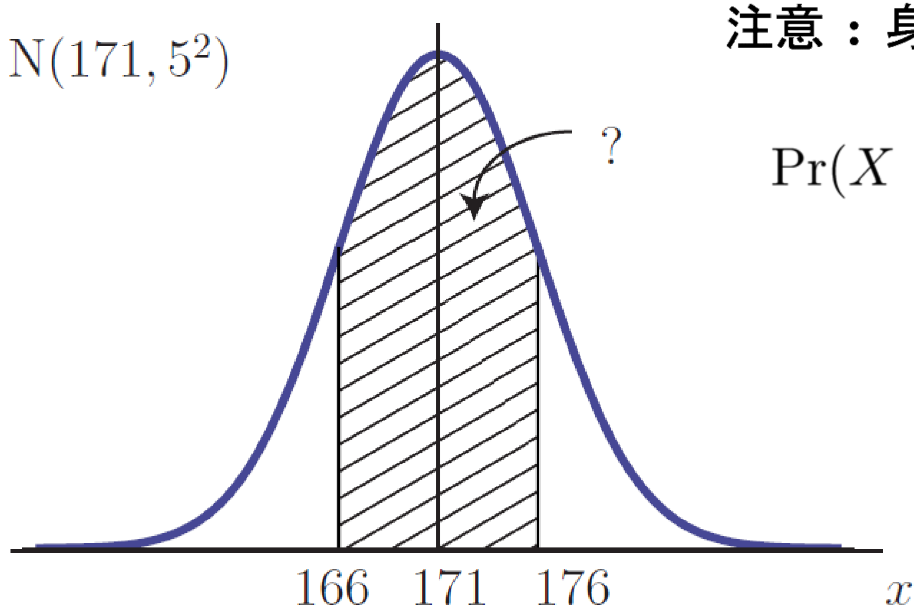
- $\frac{X-\mu}{\sigma}$ を X の基準化という.
- X の基準化 $\frac{X-\mu}{\sigma}$ の分布

$$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathrm{N}(0, 1)$$

- つまり, 標準正規分布における確率の計算に帰着する.

例 2.17

日本人 18 才男性の身長 X (cm) は正規分布 $\mathrm{N}(171, 5^2)$ に従っていると考えられています．また，18 才男性は約 62 万人です．このとき，18 才男性のうち 166 cm 以上 176 cm 以下のおよその人数はどのぐらいでしょうか



注意：身長が負の値をとる確率はほぼ 0.

$$\begin{aligned}\Pr(X \le 0) &= \Pr\left(\frac{X-171}{5} \le \frac{0-171}{5}\right) \\ &= Q(34.2) \\ &= 1.20897 \times 10^{-256}\end{aligned}$$

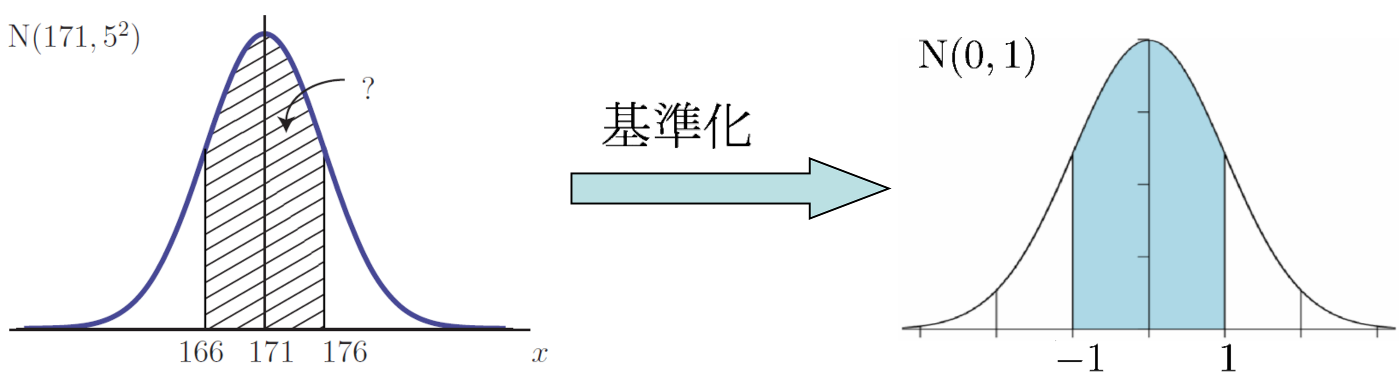
例 2.17

日本人 18 才男性の身長 X (cm) は正規分布 $\mathrm{N}(171, 5^2)$ に従っていると考えられています．また，18 才男性は約 62 万人です．このとき，18 才男性のうち 166 cm 以上 176 cm 以下のおよその人数はどのぐらいでしょうか

以下のように変形して，標準正規分布における確率計算へ帰着させる．

$$\begin{aligned}\Pr(166 \le X \le 176) &= \Pr\left(\frac{166-171}{5} \le \frac{X-171}{5} \le \frac{176-171}{5}\right) \\ &= \Pr\left(-1 \le \frac{X-171}{5} \le 1\right) = 0.683.\end{aligned}$$

18 才男性は約 62 万人なので，$620000 \times 0.683 = 423460$.

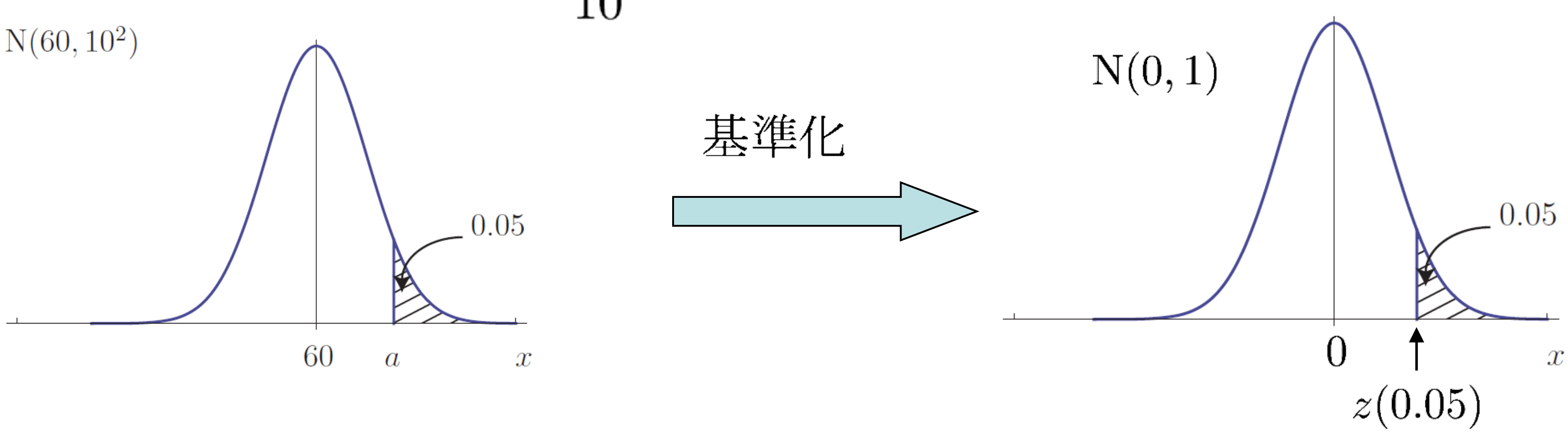


例　2. 18

ある試験の点数 X（100 点満点）は正規分布 $\mathrm{N}(60, 10^2)$ に従っているとします．A 君は上位 5% に入りたかったのですが，何点とれていれば上位 5% に入っているでしょうか．

以下のように変形して，標準正規分布における確率計算へ帰着させる．

$$
\begin{aligned}
\Pr(X \geq a) &\leq 0.05 \\
\Pr\left(\frac{X-60}{10} \geq \frac{a-60}{10}\right) &\leq 0.05 \\
\frac{a-60}{10} &\geq z(0.05)
\end{aligned}
$$



例　2．18

ある試験の点数 X（100 点満点）は正規分布 $\mathrm{N}(60, 10^2)$ に従っているとします．A 君は上位 5% に入りたかったのですが，何点とれていれば上位 5% に入っているでしょうか．

以下のように変形して，標準正規分布における確率計算へ帰着させる．

$$\begin{aligned}
\Pr(X \geq a) &\leq 0.05 \\
\Pr\left(\frac{X-60}{10} \geq \frac{a-60}{10}\right) &\leq 0.05 \\
\frac{a-60}{10} \geq z(0.05)
\end{aligned}$$

$z(0.05) = 1.6449$ なので，

$$a \geq 10 \times 1.6449 + 60 = 76.449$$

となるので，77 点以上とれば上位 5% に入れる．

まとめ（1/2）

$Q(1.23)$

・標準正規分布 $\mathrm{N}(0,1)$ の上側確率 $Q(a)$

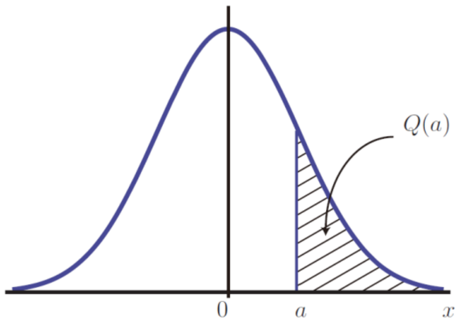


表 2.10　数表 1 の見方

a	$\cdots$	0.03	$\cdots$
$\vdots$		$\vdots$	
1.2	$\cdots$	0.1093	$\cdots$
$\vdots$		$\vdots$	

・標準正規分布 $\mathrm{N}(0,1)$ の上側 α 点 $z(\alpha)$

$z(0.025)$

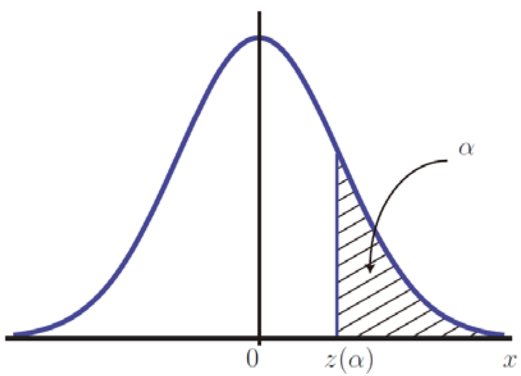


表 2.12　数表 2 の見方

α	$\cdots$	0.005	$\cdots$
$\vdots$		$\vdots$	
0.02	$\cdots$	1.9600	$\cdots$
$\vdots$		$\vdots$	

まとめ（2/2）

$-\infty < \mu < \infty,\ \sigma > 0$ とする．$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.

$$\Pr(x_1 \leq X \leq x_2) = ?$$

ただし, $x_1 < x_2$ とする．

次のように, 式変形する．

$$\Pr(x_1 \leq X \leq x_2) = \Pr\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right)$$

・$\frac{X-\mu}{\sigma}$ を X の基準化という．

・X の基準化 $\frac{X-\mu}{\sigma}$ の分布

$$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathrm{N}(0, 1)$$

・つまり, 標準正規分布における確率の計算に帰着する．