教養科目／**B** 自然の摂理の探求

2026 年度 統計学（集中１期）

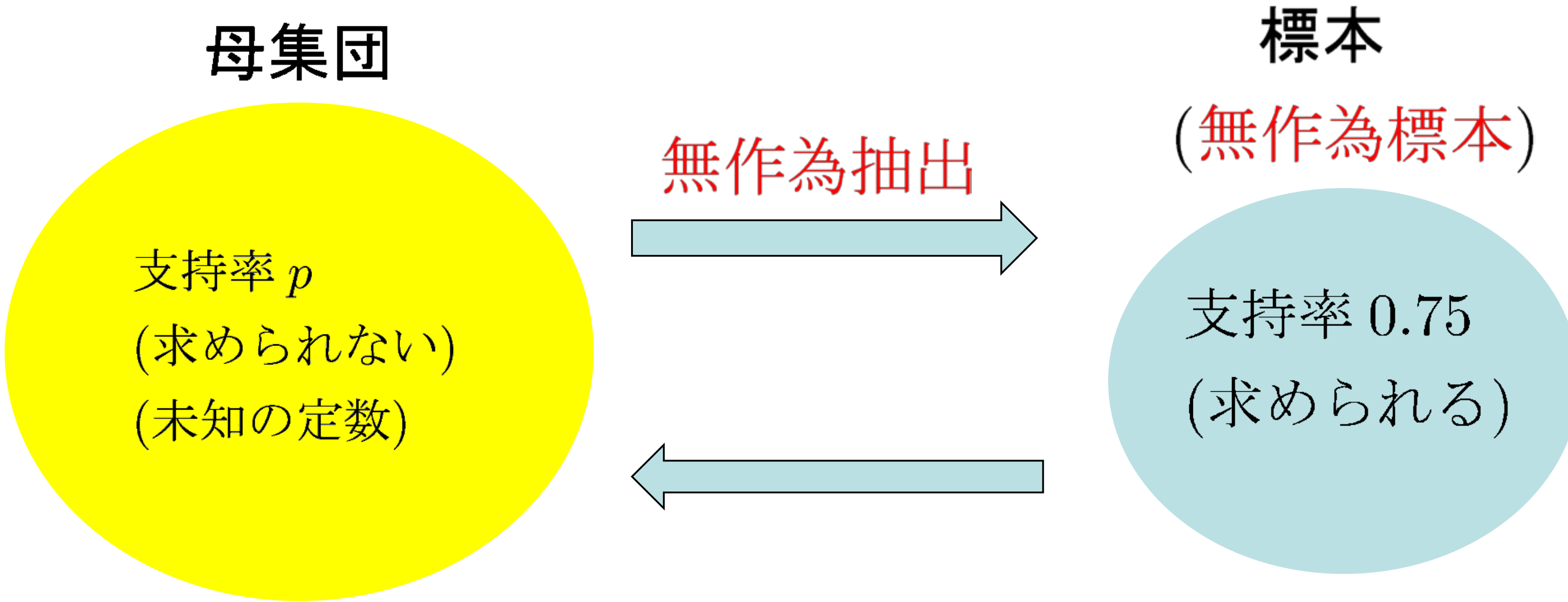
第９回

復習

- 日本の首相の支持率調査

母集団：有権者全体 (調査対象の全体)

標本：選ばれた 1000 人の有権者 (母集団の一部)



母集団の支持率（母比率）を推測

母集団での支持率と標本での支持率

- **母集団での支持率の推測:**

  母集団での支持率を p とし，標本での支持率を 75% とすると，
  p は 0.75 ぐらいと推測される．

- 1000 **人の支持率調査** (5 **回**)**:**

$$75\%, \quad 72\%, \quad 68\%, \quad 73\%, \quad 80\%$$

母集団の支持率 p は未知の定数であるが，標本での支持率は変数であり，確率変数であると考えられる．その確率変数の値（この値を**実現値**という）が 0.75, 0.72, 0.68, 0.73, 0.80 である．

標本での支持率が確率変数の実現値であると考えられる理由

・**調査結果を数値化する**：

支持することを 1, 支持しないことを 0 と表す.

・1 **回目の支持率調査の結果**:

$$1, \quad 0, \quad 0, \quad 1, \quad \cdots, \quad 0, \quad 1, \quad 1, \quad 0$$

(1 の個数が 750, 0 の個数が 250)

最初の有権者は 1 であるので，支持する有権者が選ばれたことになるが，どの有権者も等しい確率で選ばれることから，最初の有権者の 1 は

$$\Pr(X = 1) = p, \quad \Pr(X = 0) = 1 - p$$

となる確率変数 X（2 項分布 $\mathrm{B}(1, p)$ に従う）の実現値と考えられる.

この 2 項分布 $\mathrm{B}(1, p)$ のように母集団に想定される確率分布を**母集団分布**といい，母集団での支持率 p を**母比率**という.

1 回目の支持率調査の結果:

$$1, \quad \boxed{0, \quad 0, \quad 1, \quad \cdots, \quad 0, \quad 1, \quad 1, \quad 0}$$

(1 の個数が 750, 0 の個数が 250)

2 人目から 1000 人目の調査結果も 2 項分布 $\mathrm{B}(1, p)$ に従う確率変数の実現値と考えられる.

標本での支持率

$$\frac{\text{支持する有権者の人数}}{1000} = 0.75$$

も確率変数の実現値と考えられる.

標本での支持率と母集団での支持率

母集団からの無作為標本：

$$X_1, X_2, \cdots, X_{1000}$$

が２項分布 $\mathrm{B}(1,p)$ に従う確率変数とするとき，標本での支持率はこれらの標本平均：

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{1000}}{1000}$$

と表される.

標本での支持率		母集団での支持率
$\bar{X}$ の実現値	推測 $\Longrightarrow$	p

実際には，１回の支持率調査の実現値から p を推測することになるが，

$$X_1, X_2, \cdots, X_{1000}$$

は確率変数であることより, **標本での支持率 $\bar{X}$ がどのようにばらつくかが予測できる**.

第3章　推定法

母数:母集団分布の特性値

２項分布の母比率，正規分布の母平均，母分散

（例　支持率，身長の平均，分散）

・点推定

母数を1つの値で推測する

日本の首相の支持率は 75% である

・区間推定

母数を区間で推測する

日本の首相の支持率は 70% から 80% である確率は 90% である

3.1. 2項分布についての点推定

母集団分布が2項分布 B(1,p) の母比率 p は標本平均で推定される.

母集団からの無作為標本の実現値 $x_1, x_2, \cdots, x_n$

を用いて, 母比率 p は

$$\hat{p} = \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

と推定される.

例　3.1　日本首相の支持率調査

日本の首相の支持率調査では，母集団での支持率 p

標本(1000人の有権者)での支持率 0.75 のとき

母比率 p は

$$\hat{p} = \frac{750}{1000} = 0.75$$

と推定される

硬貨投げの実験

実験1

コインを 25 回投げて標本平均を求める.

1 回目の無作為標本の実現値は

$$0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1$$

25 回のうち 11 回が表であるので, 標本平均は

$$\frac{11}{25} = 0.44$$

である.

無作為標本の実現値が 1 組とれれば標本平均が 1 個できる.

・2 回目の無作為標本の実現値

$$0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0$$

25 回のうち 10 回が表であるので標本平均は $\frac{10}{25} = 0.40.$

・3 回目の無作為標本の実現値

$$1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1$$

25 回のうち 12 回が表であるので標本平均は $\frac{12}{25} = 0.48.$

無作為標本の実現値をとり，標本平均を計算するという手続きを 500 回繰り返して標本平均を 500 個求める.

$$\text{相対度数} = \frac{\text{階級の度数}}{500}$$

実験2 (100 回)

「コインを 100 回投げて標本平均を求める. 」という操作を

500 回繰り返して標本平均を 500 個求めた.

実験3 (1000 回)

「コインを 1000 回投げて標本平均を求める. 」という操作を

500 回繰り返して標本平均を 500 個求めた.

実験4 (10000 回)

「コインを 10000 回投げて標本平均を求める. 」という操作を

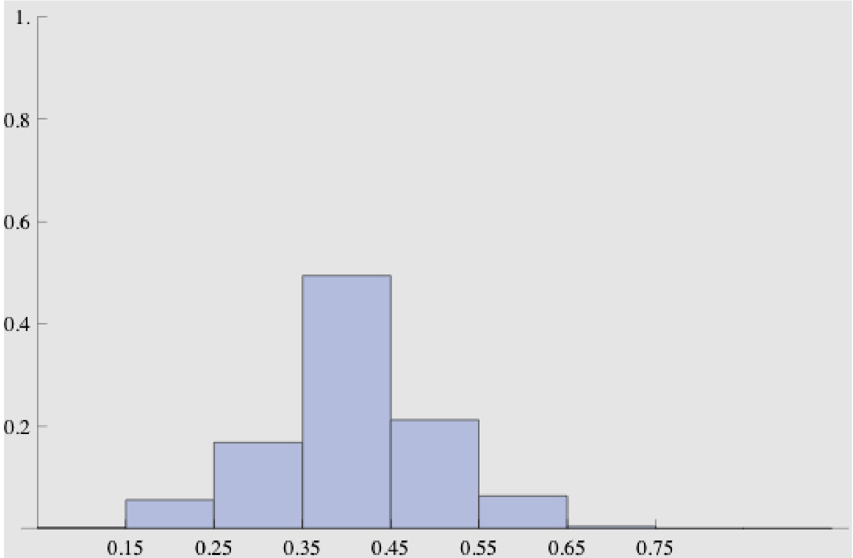
500 回繰り返して標本平均を 500 個求めた.

真値

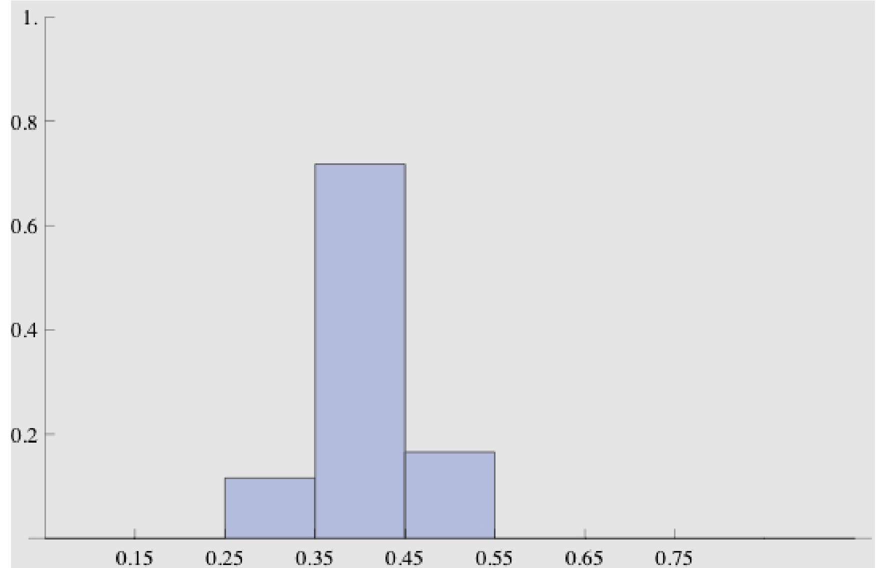
$p = 0.40$

表 3.1　母比率の推定実験の相対度数分布表

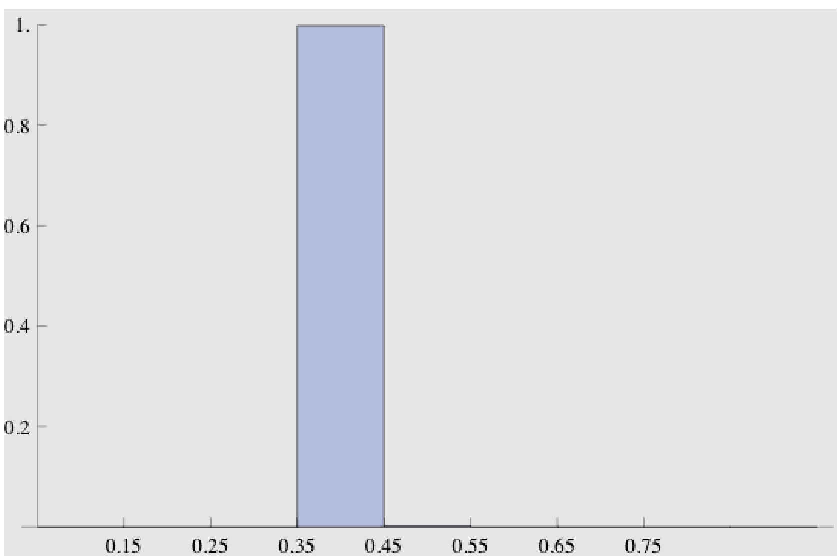
階級	実験 1	実験 2	実験 3	実験 4
0.00〜0.05	0	0	0	0
0.05〜0.15	0.002	0	0	0
0.15〜0.25	0.056	0	0	0
0.25〜0.35	0.168	0.116	0	0
0.35〜0.45	0.494	0.718	0.998	1.000
0.45〜0.55	0.212	0.166	0.002	0
0.55〜0.65	0.064	0	0	0
0.65〜0.75	0.004	0	0	0
0.75〜0.85	0	0	0	0
0.85〜0.95	0	0	0	0
0.95〜1.00	0	0	0	0
合計	1	1	1	1



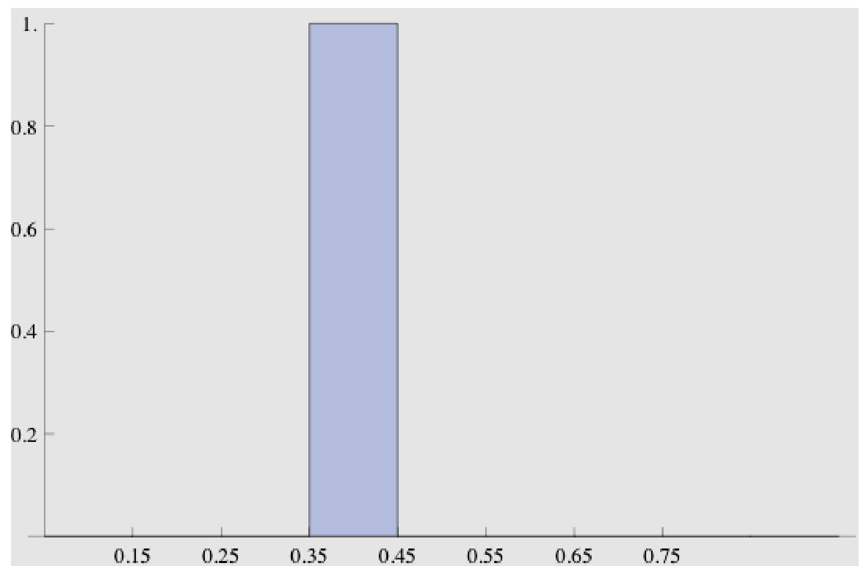
25 回



100 回



1000 回



10000 回

標本平均 $\bar{X}$ は p に近づく傾向があることがわかる.

つまり，母比率 p の値がわからなくてもデータの個数 n が比較的大きいときは標本平均によって母比率 p の値を推定することが出来る.

しかし，データの個数が小さいときは標本平均が母比率 p に近い値になる保証はない.

3.2. 正規分布についての点推定

母集団分布:正規分布 N(μ,σ^2)

母集団からの無作為標本の実現値: $x_1, x_2, \cdots, x_n$

・母平均 μ は標本平均で推定する:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

・母分散 σ^2 は不偏分散で推定する:

$$u_x^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n-1}$$

例　3.2　20 才の日本人男性の身長

日本人の身長は $N(\mu,\sigma^2)$ に従うとする.

・標本(ランダムに選んだ 1000 人の男性)

$$172.7, 178.0, 163.4, \cdots, 172.7, 173.7, 161.0$$

・母平均 μ は

$$\hat{\mu} = \frac{172.7+178.0+163.4+\cdots+172.7+173.7+161.0}{1000} = 172.1 \text{ (cm)}$$

と推定される.

・母分散 σ^2 は

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(172.7-172.1)^2+(178.0-172.1)^2+\cdots+(161.0-172.1)^2}{1000-1} \fallingdotseq 25.3 \text{ (cm}^2\text{)}$$

と推定される.

母平均 μ, 母分散 σ^2 の点推定

実験１
「25 人をランダムに選び身長を聞き取り標本平均を求める」× 500 回
（不偏分散）

実験２
「100 人をランダムに選び身長を聞き取り標本平均を求める」× 500 回
（不偏分散）

実験３
「1000 人をランダムに選び身長を聞き取り標本平均を求める」× 500 回
（不偏分散）

実験４
「10000 人をランダムに選び身長を聞き取り標本平均を求める」× 500 回
（不偏分散）

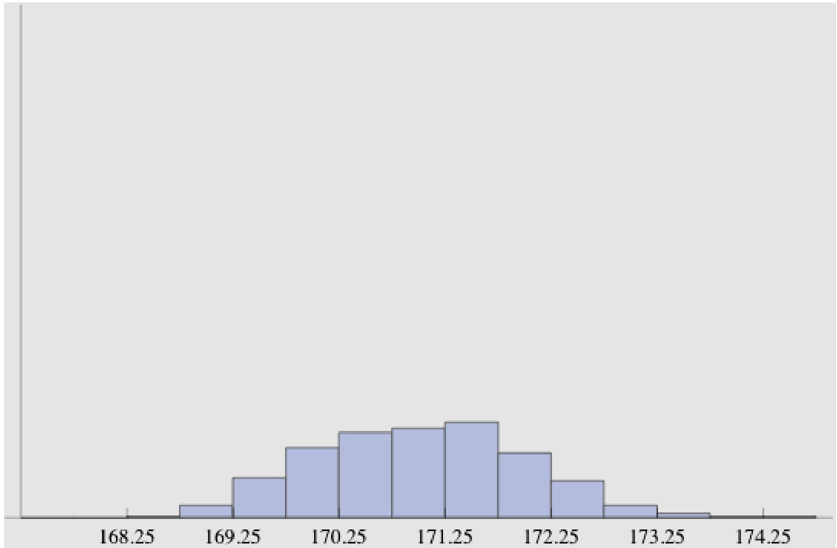
表 3.2　母平均の推定実験の相対度数分布表

母平均 μ

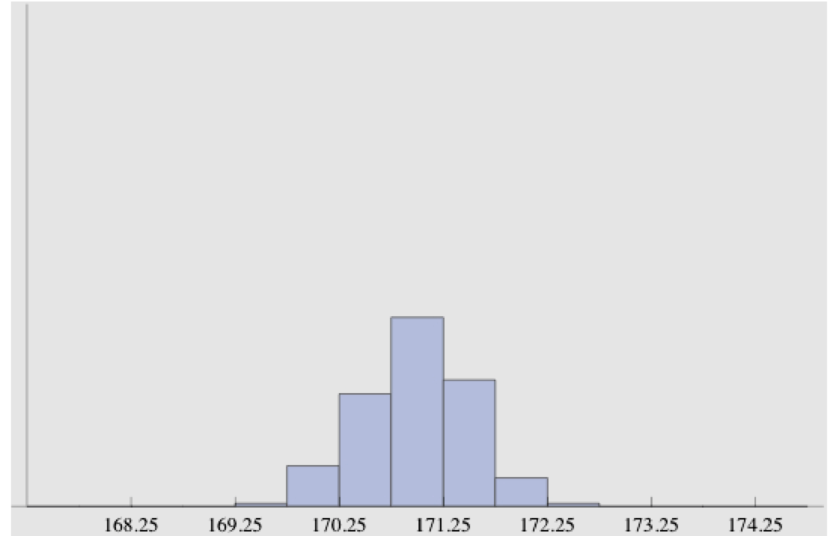
階級	実験 1	実験 2	実験 3	実験 4
168.0〜168.5	0.002	0	0	0
168.5〜169.0	0.024	0	0	0
169.0〜169.5	0.078	0.006	0	0
169.5〜170.0	0.136	0.080	0	0
170.0〜170.5	0.166	0.224	0.056	0
170.5〜171.0	0.174	0.376	0.896	1.000
171.0〜171.5	0.186	0.252	0.048	0
171.5〜172.0	0.126	0.056	0	0
172.0〜172.5	0.072	0.006	0	0
172.5〜173.0	0.024	0	0	0
173.0〜173.5	0.008	0	0	0
173.5〜174.0	0.002	0	0	0
174.0〜174.5	0.002	0	0	0
合計	1	1	1	1

真値

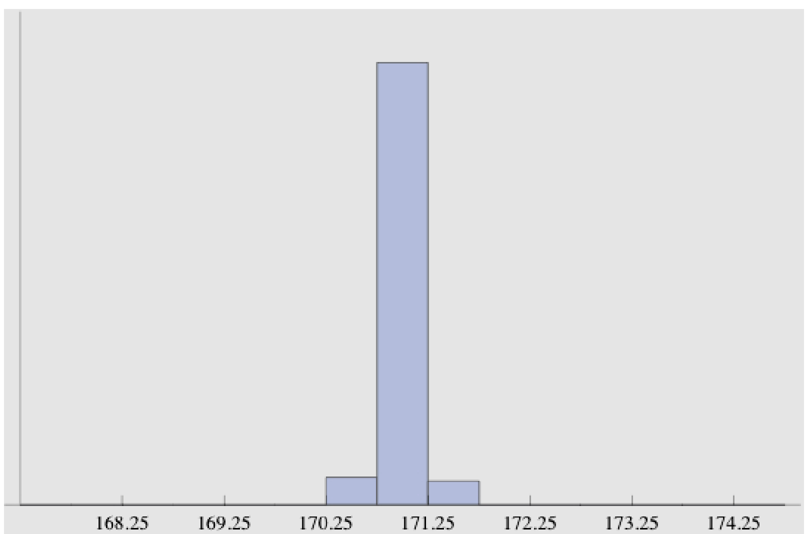
$\mu = 171$



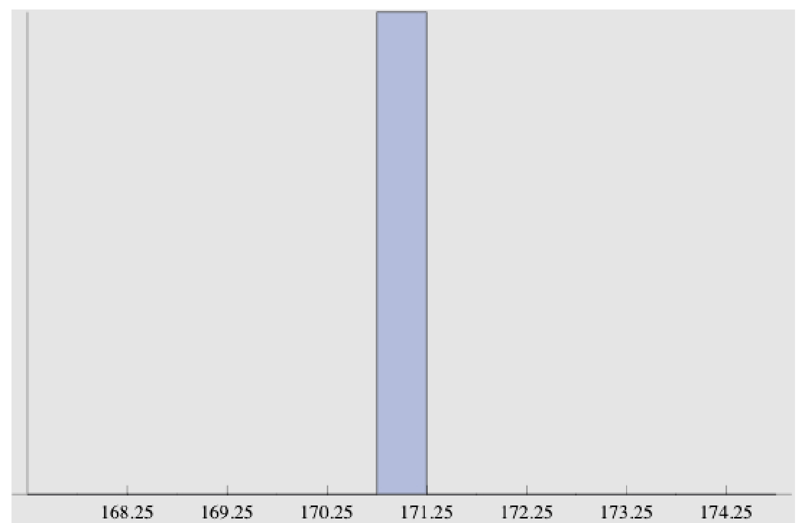
25 人



100 人



1000 人



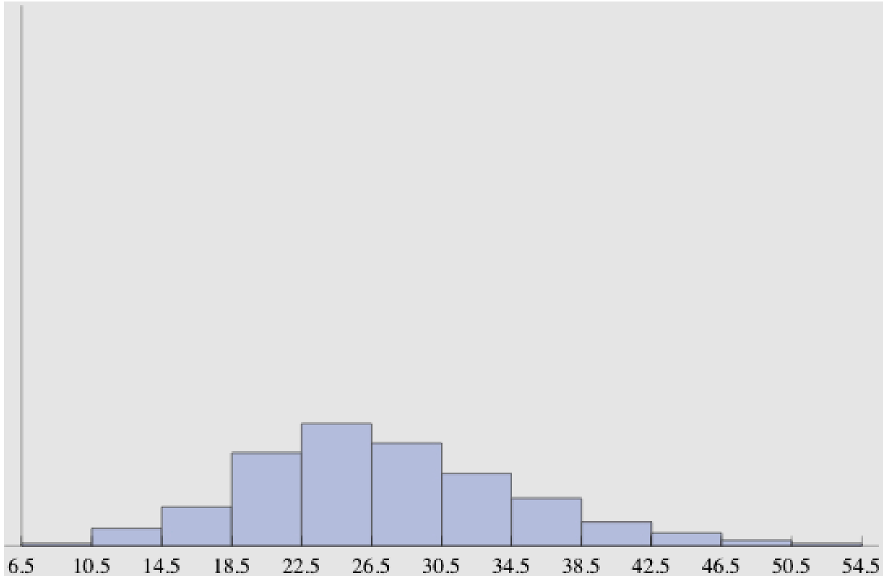
10000 人

表 3.3　母分散の推定実験の相対度数分布表

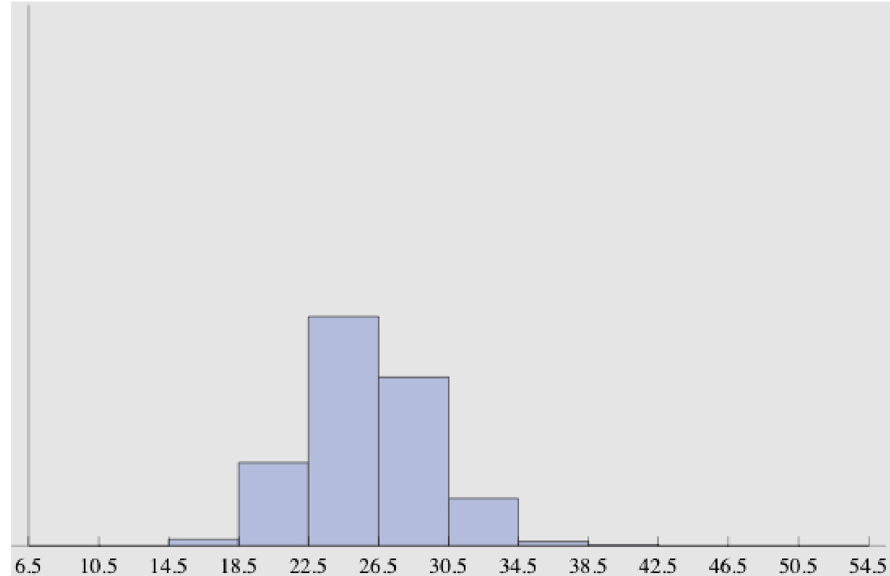
母分散 σ^2

階級	実験 1	実験 2	実験 3	実験 4
6.5〜10.5	0.004	0	0	0
10.5〜14.5	0.032	0	0	0
14.5〜18.5	0.072	0.012	0	0
18.5〜22.5	0.172	0.154	0.012	0
22.5〜26.5	0.226	0.424	0.860	1.000
26.5〜30.5	0.190	0.312	0.128	0
30.5〜34.5	0.134	0.088	0	0
34.5〜38.5	0.088	0.008	0	0
38.5〜42.5	0.044	0.002	0	0
42.5〜46.5	0.024	0	0	0
46.5〜50.5	0.010	0	0	0
50.5〜54.5	0.004	0	0	0
合計	1	1	1	1

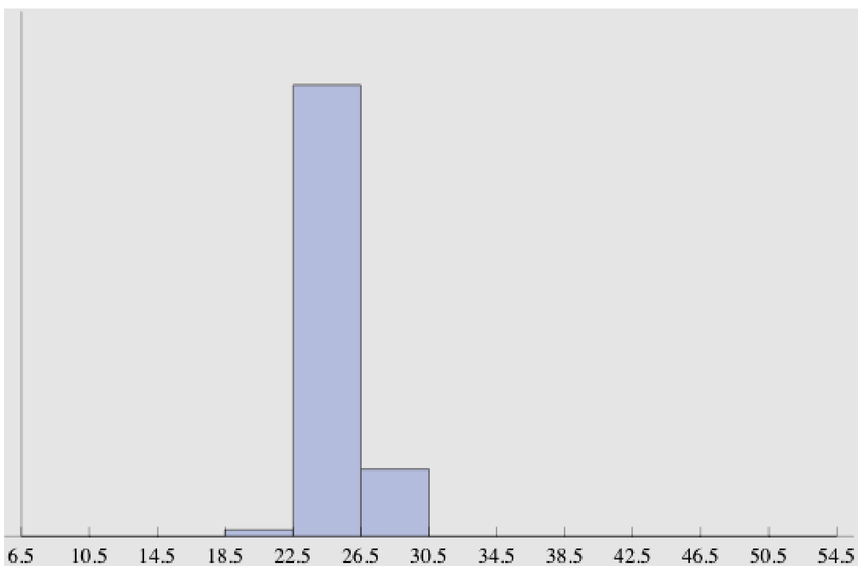
真値
$\sigma^2 = 25$



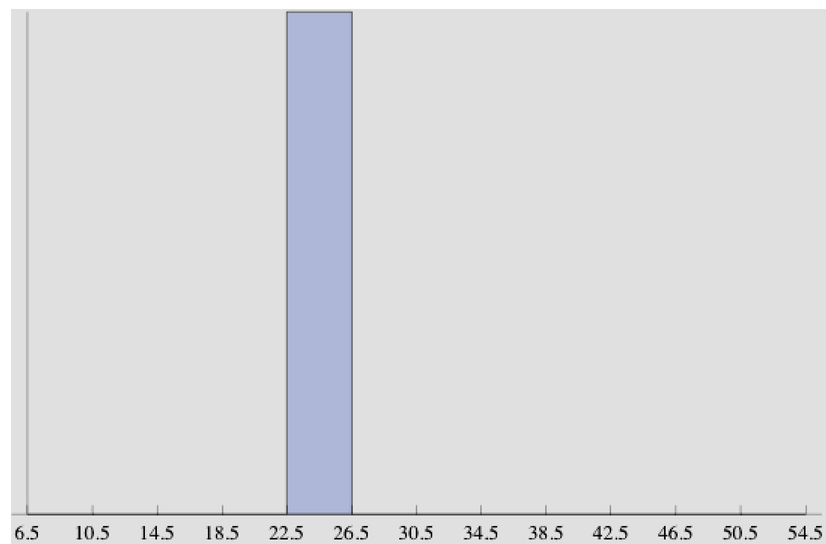
25 人



100 人



1000 人



10000 人

まとめ

母集団分布が2項分布 B(1,p) の場合，母集団からの無作為標本の実現値 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を用いて，

母比率 p は標本平均

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

で推定される.

母集団分布が正規分布 N(μ,σ²) の場合，母集団からの無作為標本の実現値 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を用いて，

母平均 μ は標本平均

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

母分散 σ^2 は不偏分散

$$u_x^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n-1}$$

で推定される.

実際には，1 回の調査結果しかないので，標本平均，不偏分散を確率変数と考えることが重要となる.