教養科目／B 自然の摂理の探求

2026 年度 統計学（集中１期）

第１１回

前回の内容

母集団分布：2項分布 B(1,p)

・母比率 p の 95% 信頼区間（公式 3.4）

データの個数の決め方

・正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ の母平均 μ の区間推定の場合
(ただし，母分散 σ^2 は既知)

・2項分布 B(1,p) の母比率 p の区間推定の場合

公式 3.4.

母比率 p の 95% 信頼区間は

$$\text{標本平均} - 1.96\sqrt{\frac{\text{標本平均}\ (1-\text{標本平均})}{n}}$$

$$< \text{母比率} <$$

$$\text{標本平均} + 1.96\sqrt{\frac{\text{標本平均}\ (1-\text{標本平均})}{n}}$$

数式で書くと,

$$\bar{x} - 1.96\sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}} < p < \bar{x} + 1.96\sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}$$

データの個数の決め方（H：区間の幅の目標値）

正規分布 N(μ,σ^2) の母平均 μ の 95% 信頼区間の場合
ただし，母分散 σ^2 は既知

$$n \geq \frac{(2\times 1.96)^2 \times (\text{母分散})}{H^2}$$

２項分布 B(1,p) の母比率 p の 95% 信頼区間の場合

$$n \geq \left(\frac{1.96}{H}\right)^2$$

復習

・1 回の試行で,

ある事象が起こる確率：p，　起こらない確率：1−p ．

n 回の試行で, この事象の起こる回数を X ．

・X の従う分布が, ２項分布 B(n,p)：

$$\Pr(X = x) = {}_n\mathrm{C}_x\, p^x (1-p)^{n-x}$$

$$(x = 0, 1, \cdots, n)$$

第4章　検定法

4.1.　検定の考え方

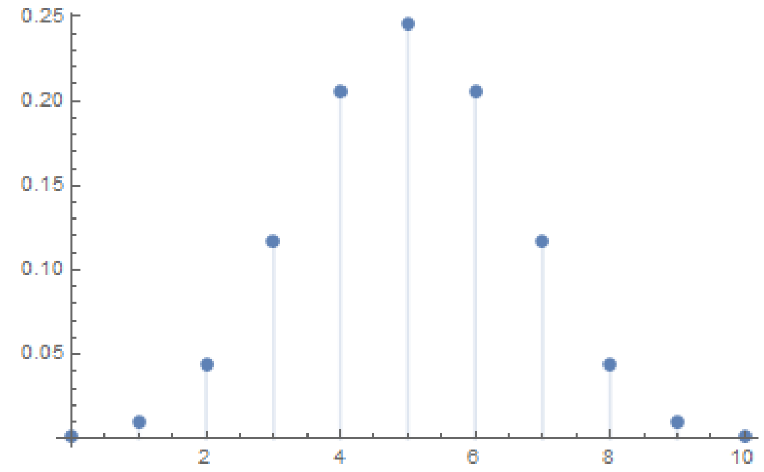
例. コイン投げ

コインを 10 回投げて，表が 9 回出た

(i)　表が 9 回出る確率はゼロではないので，
このようなことが起こっても不思議ではない．

(ii)　表が出やすくなっているのではないか．
そのような細工がされているのではないか．

もし, $p = \frac{1}{2}$ とすると,



コインを 10 回投げて, 表が 9 回出る確率:

$$ {}_{10}\mathrm{C}_9 \left(\frac{1}{2}\right)^9 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{10-9} = \frac{10}{2^{10}} \fallingdotseq 0.00977 $$

統計学では**確率の小さいことは起こりにくい**と考え,
もし起こったならば**起こった理由があると考える**.

どれくらいを確率が小さいかというと, 0.05 がよく用いられ, これを**有意水準**といい, α と表す.

有意水準には, 0.05 以外にも, 0.10, 0.01 も用いられる.

仮説検定

帰無仮説 $\mathrm{H}_0 : p = \frac{1}{2}$ （否定したい仮説）

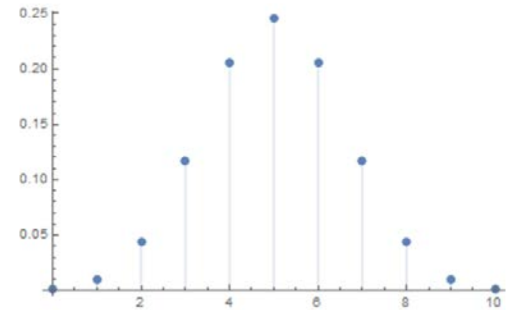
対立仮説 $\mathrm{H}_1 : p > \frac{1}{2}$ （主張したい仮説）

（帰無仮説 , 対立仮説のどちらかが正しいとする. ）

帰無仮説が正しい($p = \frac{1}{2}$)として議論を始める.

$W = \{9, 10\}$ に対して

$X(\text{表の出る回数}) \sim \mathrm{B}\left(10, \frac{1}{2}\right)$



の実現値 x が
$(\text{例では}, x = 9.)$

- W に含まれる → H_0 を棄却
- W に含まれない

注意

・W のような領域を**棄却域**という.

・ H_0 が棄却される → H_1 であると判断が明瞭になる.

・ H_0 が棄却されない
→ H_0 であるといえないこともないと判断が不明瞭に.

（判断が不明瞭になるのは p は 1/2 とは少し異なるかもしれないという可能性があるため）

・仮説検定では, H_0 が棄却されることに意味があり, H_0 が棄却されることを**有意である**ともいう. このため, 検定は**有意性検定**と呼ばれることもある

・X のような仮説検定を行うために用いられる統計量を**検定統計量**と呼ぶ.

統計的仮説検定における2種類の誤り

第1種の誤りとは，帰無仮説 H_0 が正しいにもかかわらず，帰無仮説 H_0 が棄却される誤り

第2種の誤りとは，対立仮説 H_1 が正しいにもかかわらず，帰無仮説 H_0 が棄却されない誤り

	H_0 が棄却される	H_0 が棄却されない
H_0 が正しい	第1種の誤りの確率	1-（第1種の誤りの確率）
H_1 が正しい	1-（第２種の誤りの確率）	第２種の誤りの確率

第1種の誤り

$\mathrm{H}_0 : p = \frac{1}{2}$ が正しいにもかかわらず，棄却してしまう誤り.

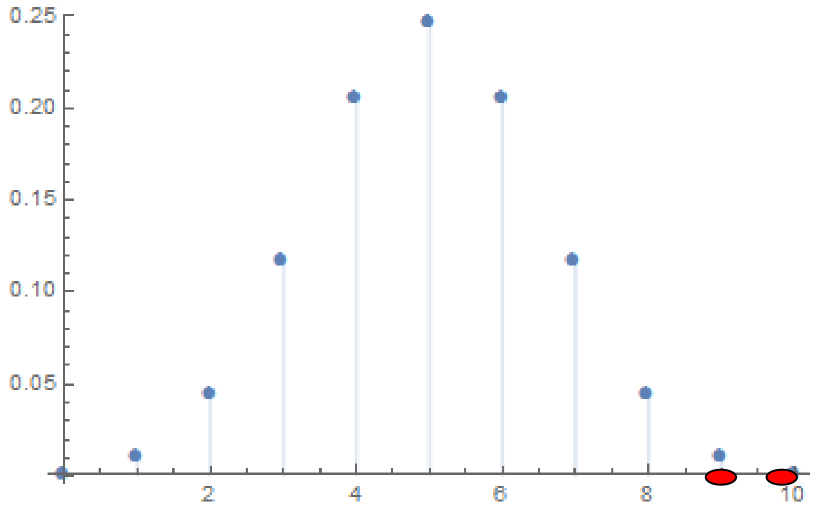
検定統計量の従う分布: $X \sim \mathrm{B}\left(10, \frac{1}{2}\right)$

第 1 種の誤りの確率

$$= {}_{10}\mathrm{C}_9 \left(\frac{1}{2}\right)^9 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{10-9}$$

$$+ {}_{10}\mathrm{C}_{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{10-10}$$

$$= \frac{11}{2^{10}} \fallingdotseq 0.0107$$



検定統計量の従う分布
（赤丸は棄却域）

第2種の誤り

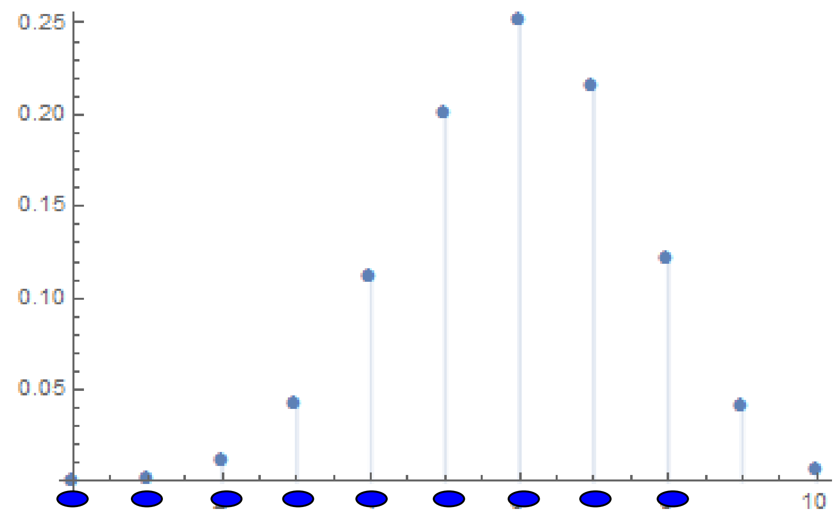
$\mathrm{H}_0 : p = \frac{1}{2}$ が正しくないにもかかわらず，棄却しない誤り.

検定統計量の従う分布: $X \sim \mathrm{B}\left(10, p\right) \quad \left(p > \frac{1}{2}\right)$

第 2 種の誤りの確率

$$= \sum_{x=0}^{8} {}_{10}\mathrm{C}_x p^x (1-p)^{10-x}$$

$$= 1 - {}_{10}\mathrm{C}_9 p^9 (1-p)^{10-9} - {}_{10}\mathrm{C}_{10} p^{10} (1-p)^{10-10}$$



検定統計量の従う分布 $p = 0.6$
（青丸は棄却されない領域）

注意

- 第2種の誤りの確率を数値として求めるためには，
  実際には求めることのできない p の値が必要に
  なってしまう.
- 第1種の誤りの確率は数値として明確に求められる.

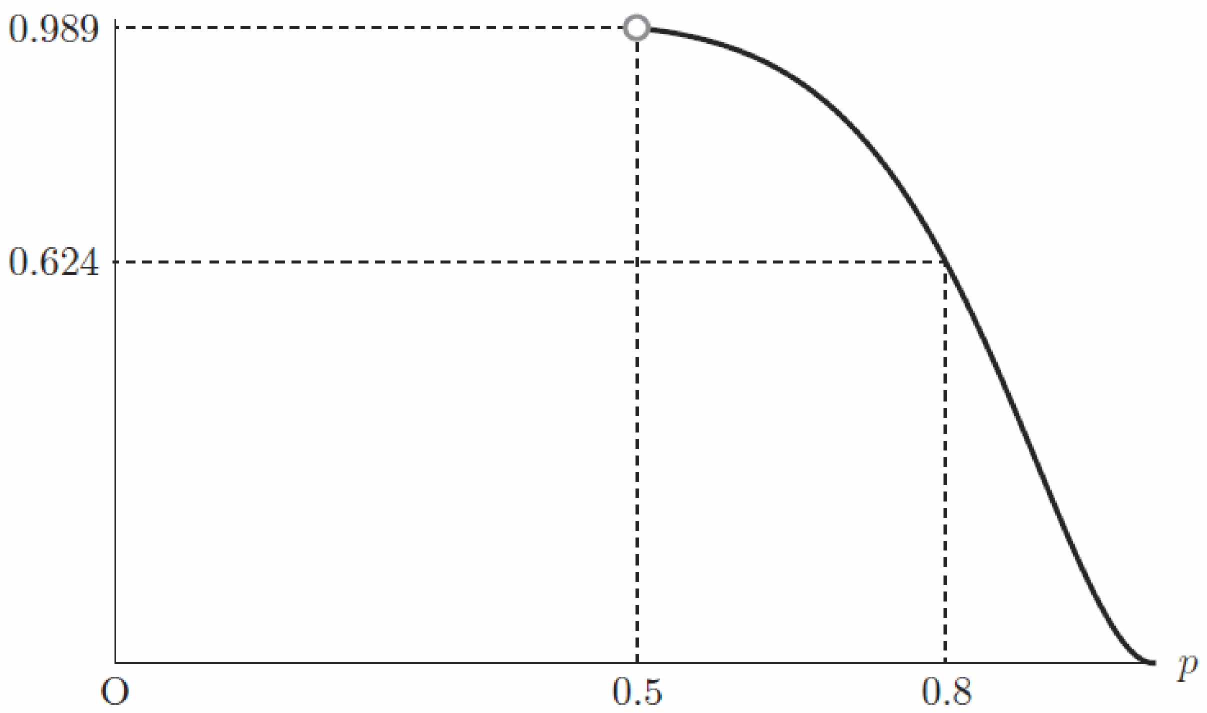


図 4.1　第 2 種の誤りの確率 (4.2) のグラフ

2種類の誤りの関係

コイン投げの例において, 2つの棄却域を考える:

$$W = \{9, 10\} \qquad W' = \{8, 9, 10\}$$

当然 W' のほうが W より広い棄却域

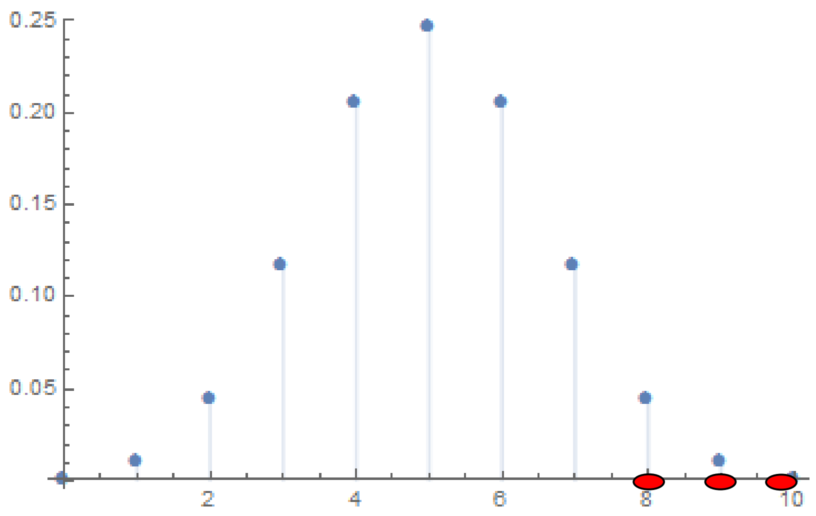
	$W = \{9, 10\}$	$W' = \{8, 9, 10\}$
第1種の誤り	0.0107	?
第2種の誤り	$1 - {}_{10}\mathrm{C}_9 p^9 (1-p)^{10-9}$ $- {}_{10}\mathrm{C}_{10} p^{10} (1-p)^{10-10}$	?

第1種の誤り

$\mathrm{H}_0 : p = \frac{1}{2}$ が正しいにもかかわらず，棄却してしまう誤り.

検定統計量の従う分布: $X \sim \mathrm{B}\left(10, \frac{1}{2}\right)$

$$\begin{aligned} &\text{第 1 種の誤りの確率} \\ &= {}_{10}\mathrm{C}_8 \left(\frac{1}{2}\right)^8 \left(1-\frac{1}{2}\right)^{10-8} \\ &\quad + {}_{10}\mathrm{C}_9 \left(\frac{1}{2}\right)^9 \left(1-\frac{1}{2}\right)^{10-9} \\ &\quad + {}_{10}\mathrm{C}_{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \left(1-\frac{1}{2}\right)^{10-10} \\ &= \frac{56}{2^{10}} \fallingdotseq 0.0547 \end{aligned}$$



検定統計量の従う分布
（赤丸は棄却域）

第2種の誤り

$\mathrm{H}_0 : p = \frac{1}{2}$ が正しくないにもかかわらず，棄却しない誤り.

検定統計量の従う分布: $X \sim \mathrm{B}\left(10, p\right) \quad \left(p > \frac{1}{2}\right)$

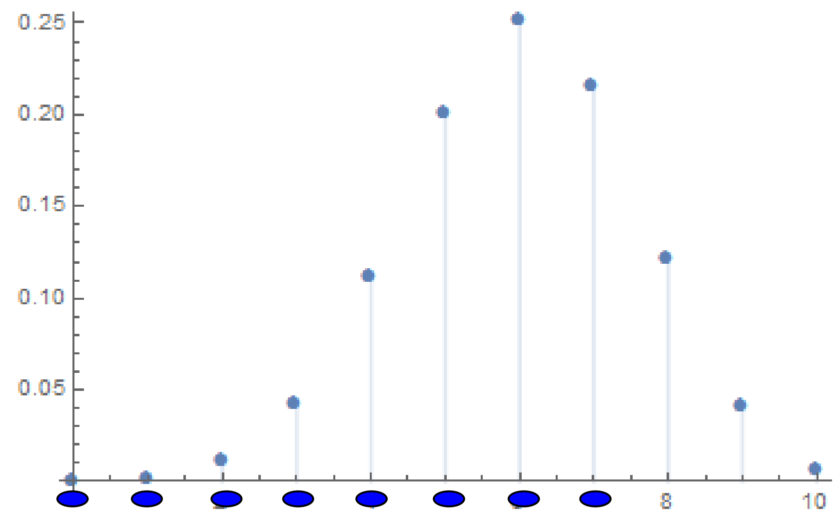
第 2 種の誤りの確率

$$= \sum_{x=0}^{7} {}_{10}\mathrm{C}_x p^x (1-p)^{10-x}$$

$$= 1 - {}_{10}\mathrm{C}_8 p^8 (1-p)^{10-8}$$

$$- {}_{10}\mathrm{C}_9 p^9 (1-p)^{10-9}$$

$$- {}_{10}\mathrm{C}_{10} p^{10} (1-p)^{10-10}$$



検定統計量の従う分布 $p = 0.6$
（青丸は棄却されない領域）

2種類の誤りの関係

コイン投げの例において, 2つの棄却域を考える:

$$W = \{9, 10\} \qquad W' = \{8, 9, 10\}$$

当然 W' のほうが W より広い棄却域

	$W = \{9, 10\}$	$W' = \{8, 9, 10\}$
第1種の誤り	0.0107	増える → 0.0547
第2種の誤り	$1 - {}_{10}\mathrm{C}_9 p^9 (1-p)^{10-9} - {}_{10}\mathrm{C}_{10} p^{10} (1-p)^{10-10}$	減る → $1 - {}_{10}\mathrm{C}_8 p^8 (1-p)^{10-8} - {}_{10}\mathrm{C}_9 p^9 (1-p)^{10-9} - {}_{10}\mathrm{C}_{10} p^{10} (1-p)^{10-10}$

2種類の誤りの関係

第1種の誤りの確率が大きく(小さく)なる

⇩

第2種の誤りの確率は小さく(大きく)なる

両方を同時に小さくすることはできない.
一方を小さくすると，他方は大きくなってしまう.（トレードオフ）

そこで

仮説検定では，まず，**有意水準 α を決め，第1種の誤りの確率をその有意水準 α 以下とし，第2種の誤りの確率ができるだけ小さくなるように棄却域を作る**.

棄却域の種類

一般に，棄却域には，

$(-\infty,a]\cup[b,\infty)$　　$(-\infty,c]$　　$[d,\infty)$

の3つの作り方がある.
（ここで，a,b,c,d は有意水準によって決まる定数.）

両側検定

$(-\infty,a]\cup[b,\infty)$

(i) 両側検定

片側検定

$(-\infty,c]$

左片側検定

$[d,\infty)$

右片側検定

(ii) 左片側検定

(iii) 右片側検定

主張したい事柄:硬貨の表が出る確率は1/2でない（両側検定）

帰無仮説 $\mathrm{H}_0 : p = \frac{1}{2}$ （否定したい仮説）

対立仮説 $\mathrm{H}_1 : p \neq \frac{1}{2}$ （主張したい仮説）

主張したい事柄:表が出にくくなっているのではないか（左片側検定）

帰無仮説 $\mathrm{H}_0 : p = \frac{1}{2}$ （否定したい仮説）

対立仮説 $\mathrm{H}_1 : p < \frac{1}{2}$ （主張したい仮説）

主張したい事柄:表が出やすくなっているのではないか（右片側検定）

帰無仮説 $\mathrm{H}_0 : p = \frac{1}{2}$ （否定したい仮説）

対立仮説 $\mathrm{H}_1 : p > \frac{1}{2}$ （主張したい仮説）

仮説検定の手順

ステップ1　帰無仮説，対立仮説を設け，有意水準を決める.

ステップ2　検定統計量の実現値を求める.

ステップ3　棄却域を求める.

ステップ4　帰無仮説が棄却されるかどうかを判定する.

どのような検定統計量を用いるか，また棄却域の具体的な作り方については 4.2 節以降で考えます.

4.2. 1つの正規分布についての検定

例 4.2.

あるスナック菓子は1袋の内容量が 100 (g) と表示されています．
ある生産ラインで製造されたスナック菓子からランダムに 40 袋を
選び内容量を測ったところ，

標本平均 $\bar{x} = 101$　　　不偏分散 $u_x^2 = 5.8$

でした．

この生産ラインで製造されたスナック菓子 40 袋の標本平均 101 は
表示の 100 とあまり違わないように感じます．

そこで，母平均に関する仮説検定を行うことによって調べてみましょう．

ただし，内容量は正規分布 N(μ,σ^2) に従っているものとします．

4.2.1.母平均の検定（母分散は既知の場合）

母集団:この生産ラインで製造されたスナック菓子全体
内容量の分布:正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$

母平均 μ が表示の 100 と異なるかどうかを考えてみましょう.

帰無仮説 $H_0: \mu=100$　　対立仮説 $H_1: \mu\neq100$

同じような問題にも適用できるように問題を少し一般化すると,

帰無仮説 $H_0: \mu=\mu_0$　　対立仮説 $H_1: \mu\neq\mu_0$

主張したいのは「母平均 μ が μ_0 に等しくない」こと
否定したいのは「母平均 μ が μ_0 に等しい」こと.

定数

・帰無仮説 H_0: $\mu=\mu_0$ のときの Z の分布

母分散 σ^2 が既知である場合, 帰無仮説 H_0: $\mu=\mu_0$ のもとで,

$$Z = \sqrt{\frac{n}{母分散}} \times (標本平均 - \mu_0)$$

は標準正規分布N(0,1) に従う.　　n データの個数

・対立仮説 H_1: $\mu\neq\mu_0$ のときの Z の取る値の傾向

$\mu < \mu_0$ ⟹ 小さい値

$\mu > \mu_0$ ⟹ 大きい値

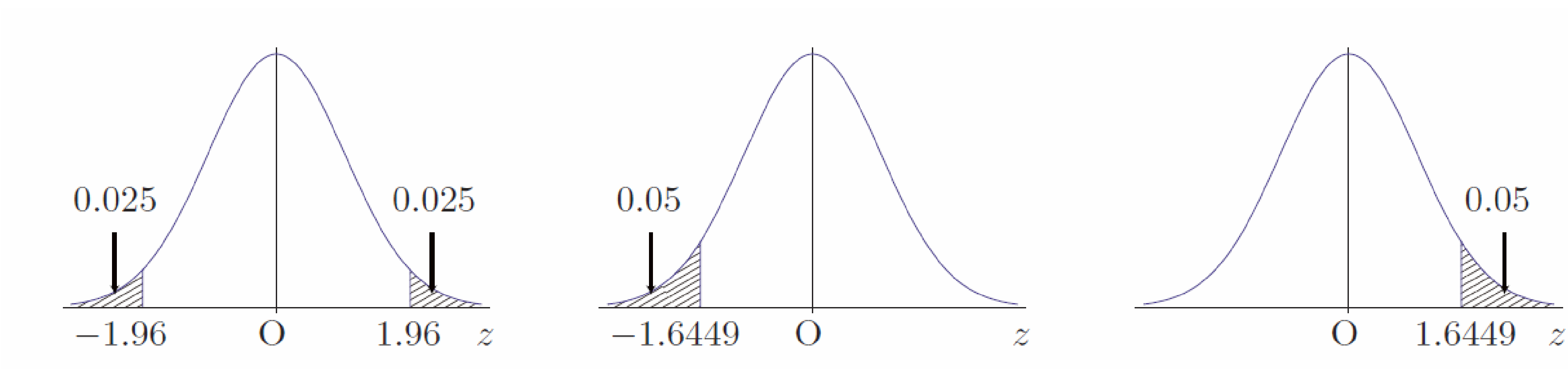
・棄却域

有意水準を 0.05 とすると，この問題の場合の棄却域は

H_1: $\mu \neq \mu_0$ のとき，$(-\infty,-1.96] \cup [1.96,\infty)$

H_1: $\mu < \mu_0$ のとき，$(-\infty,-1.6449]$

H_1: $\mu > \mu_0$ のとき，$[1.6449,\infty)$



$\mu \neq \mu_0$ $\mu < \mu_0$ $\mu > \mu_0$

公式 4.1（有意水準:0.05）

母集団分布:母分散 σ^2 が既知である正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ について

帰無仮説　H_0: $\mu=\mu_0$　　対立仮説　H_1: $\mu\neq\mu_0$

を有意水準 0.05 で検定する場合，検定統計量 Z および棄却域 W は

$$Z=\sqrt{\frac{n}{\text{母分散}}}\times(\text{標本平均}-\mu_0)$$

$$W=(-\infty,-1.96]\cup[1.96,\infty)$$

・検定方式

Z の実現値 z が W に含まれる

⇩

H_0 を棄却

(H_1 であると判断する.)

Z の実現値 z が W に含まれない

⇩

H_0 を棄却しない

例 4.3.

スナック菓子の内容量のデータで検定をしてみましょう.

標本平均 $\bar{x} = 101$　母分散 $\sigma^2 = 5$　データの個数 $n = 40$

既知

- 仮説の設定

「内容量の母平均 μ は 100 とは異なるかどうか」

↓

帰無仮説　H_0: μ=100　　対立仮説　H_1: μ≠100

- 検定統計量 Z の実現値 z

$$z = \sqrt{\frac{40}{5}} \times (101 - 100) \fallingdotseq 2.83$$

・検定統計量 Z の実現値 z

$$z = \sqrt{\frac{40}{5}} \times (101 - 100) \fallingdotseq 2.83$$

・有意水準 0.05 の場合の棄却域

$$W = (-\infty, -1.96] \cup [1.96, \infty)$$

$z \fallingdotseq 2.83$ は棄却域に含まれるので, H_0 は棄却されます.

⇩

つまり,「この生産ラインで製造されたスナック菓子の内容量の母平均 μ は100 と異なる」と判断されます.

検定の手順

帰無仮説: H_0(〇〇である.) **vs. 対立仮説:** H_1(〇〇でない)
母平均 μ は100である.　　　　母平均 μ は100と異なる.

1. データから検定統計量の実現値を計算する.

$$z = \sqrt{\frac{40}{5}} \times (101 - 100) \fallingdotseq 2.83$$

2. 有意水準を定めて棄却域を作る.

$$W = (-\infty, -1.96] \cup [1.96, \infty)$$

3. 帰無仮説 H_0**を棄却するか棄却しないかの判断.**

- **検定統計量の実現値が棄却域に含まれる ⇒** H_0**を棄却.**
- **検定統計量の実現地が棄却域に含まれない⇒** H_0**を棄却しない.**

4. 結論を書く.

- H_0**を棄却 ⇒** 〇〇でない(H_1)と判断される.
- H_0**を棄却しない⇒** 〇〇である(H_0)と言えないこともないと判断される.

この生産ラインで製造されたスナック菓子の内容量の
母平均 μ は100 と異なると判断される

4.2.2.母平均の検定(母分散は未知の場合)

母分散 σ^2 が**未知**の場合は，H_0: $\mu=\mu_0$ のもとで，

$$T = \sqrt{\frac{n}{\text{不偏分散}}} \times (\text{標本平均} - \mu_0)$$

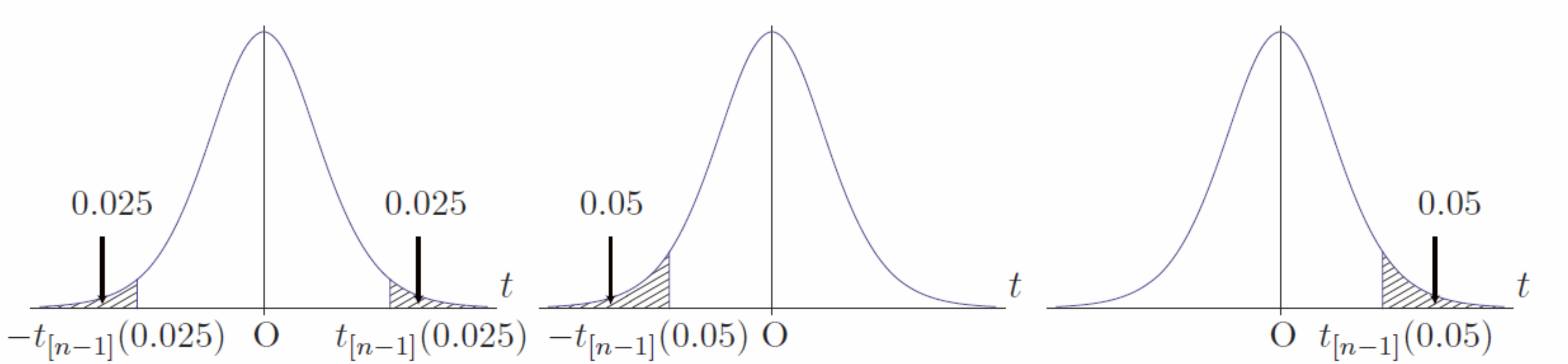
は**自由度 n−1 の t 分布**に従うことが知られています．

・棄却域

H_1: $\mu \neq \mu_0$ のとき，$(-\infty, -t_{[n-1]}(0.025)] \cup [t_{[n-1]}(0.025), \infty)$

H_1: $\mu < \mu_0$ のとき，$(-\infty, -t_{[n-1]}(0.05)]$

H_1: $\mu > \mu_0$ のとき，$[t_{[n-1]}(0.05), \infty)$



$\mu \neq \mu_0$ $\qquad$ $\mu < \mu_0$ $\qquad$ $\mu > \mu_0$

公式 4.2（有意水準：0.05）

母集団分布：母分散 σ^2 が未知である正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ について

帰無仮説　$H_0: \mu=\mu_0$　対立仮説　$H_1: \mu\neq\mu_0$

を有意水準 0.05 で検定する場合，検定統計量 T および棄却域 W は

$$T = \sqrt{\frac{n}{\text{不偏分散}}} \times (\text{標本平均} - \mu_0)$$

$$W = (-\infty, -t_{[n-1]}(0.025)] \cup [t_{[n-1]}(0.025), \infty)$$

・検定方式

T の実現値 t が W に含まれる

⇩

H_0 を棄却
(H_1 であると判断する．)

T の実現値 t が W に含まれない

⇩

H_0 を棄却しない

例 4.4.

スナックの菓子の内容量のデータで検定をしてみましょう.

標本平均 $\bar{x} = 101$ 　不偏分散 $u_x^2 = 5.8$ データの個数 $n = 40$

・仮説の設定

「内容量の母平均 μ は 100 とは異なるかどうか」

⇩

帰無仮説 H_0: $\mu=100$ 　対立仮説 H_1: $\mu\neq100$

・検定統計量 T の実現値 t

$$t = \sqrt{\frac{40}{5.8}} \times (101 - 100) \fallingdotseq 2.63$$

・検定統計量 T の実現値 t

$$t = \sqrt{\frac{40}{5.8}} \times (101 - 100) \fallingdotseq 2.63$$

・有意水準 0.05 の場合の棄却域

$$W = (-\infty, -2.023] \cup [2.023, \infty)$$

$z \fallingdotseq 2.63$ は棄却域に含まれるので, H_0 は棄却されます.

つまり,「この生産ラインで製造されスナックた菓子の内容量の母平均 μ は100 と異なる」と判断されます.

注意 4.1

例4.3，例4.4 では，母分散が既知の場合と未知の場合で導かれる結論は同じでしたが，**一般には結論が異なることもあります**．

仮説検定によって何らかの結論を導く場合には，どのような方法をとったか，前提条件は何であるかということが重要な要素となります．

まとめ

仮説検定

帰無仮説，対立仮説，棄却域，有意水準

有意である，有意でない，検定統計量

第１種の誤り，第２種の誤り，両側検定，片側検定

１つの正規母集団 $N(\mu,\sigma^2)$ に関する検定

母平均 μ に関する検定（母分散 σ^2 が既知の場合）
公式 4.1

母平均 μ に関する検定（母分散 σ^2 が未知の場合）
公式 4.2