教養科目／**B** 自然の摂理の探求

2026 年度 統計学（集中１期）

第１２回

前回の内容

1つの正規母集団 N(μ,σ^2) に関する検定

母平均 μ に関する検定（母分散 σ^2 が既知の場合）
公式 4.1

母平均 μ に関する検定（母分散 σ^2 が未知の場合）
公式 4.2

公式 4.1（有意水準:0.05）

母集団分布:母分散 σ^2 が既知である正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ について

帰無仮説 H_0: $\mu=\mu_0$　対立仮説 H_1: $\mu\neq\mu_0$

を有意水準 0.05 で検定する場合，検定統計量 Z および棄却域 W は

$$Z = \sqrt{\frac{n}{\text{母分散}}} \times (\text{標本平均} - \mu_0)$$

$$W = (-\infty, -1.96] \cup [1.96, \infty)$$

・検定方式

Z の実現値 z が W に含まれる	Z の実現値 z が W に含まれない
⇩	⇩
H_0 を棄却 (H_1 であると判断する．)	H_0 を棄却しない

公式 4.2（有意水準:0.05）

母集団分布:母分散 σ^2 が未知である正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ について

帰無仮説　H_0: $\mu=\mu_0$　対立仮説　H_1: $\mu\neq\mu_0$

を有意水準 0.05 で検定する場合，検定統計量 T および棄却域 W は

$$T = \sqrt{\frac{n}{\text{不偏分散}}} \times (\text{標本平均} - \mu_0)$$

$$W = (-\infty, -t_{[n-1]}(0.025)] \cup [t_{[n-1]}(0.025), \infty)$$

･検定方式

T の実現値 t が W に含まれる

⇩

H_0 を棄却
(H_1 であると判断する．)

T の実現値 t が W に含まれない

⇩

H_0 を棄却しない

4.2.3.母分散の検定（母平均は未知の場合）

例 4.2. (スナック菓子の内容量)

内容量の母分散 σ^2 は 5 と異なるかどうかについて検定する.

帰無仮説 H_0: $\sigma^2 = 5$ 対立仮説 H_1: $\sigma^2 \neq 5$

同じような問題にも適用できるように問題を少し一般化すると,

帰無仮説 H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$ 対立仮説 H_1: $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$

(σ_0^2 はある特定の値)

・帰無仮説 $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ のもとでの Y の分布

帰無仮説 $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ のもとで,

$$Y = (n-1) \times \frac{\text{不偏分散}}{\sigma_0^2}$$

は **自由度 n−1 の χ^2 分布** に従う.

・対立仮説 $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ のときの Y の取る値の傾向

$\sigma^2 < \sigma_0^2$ ⟹ 小さい値

$\sigma^2 > \sigma_0^2$ ⟹ 大きい値

・棄却域

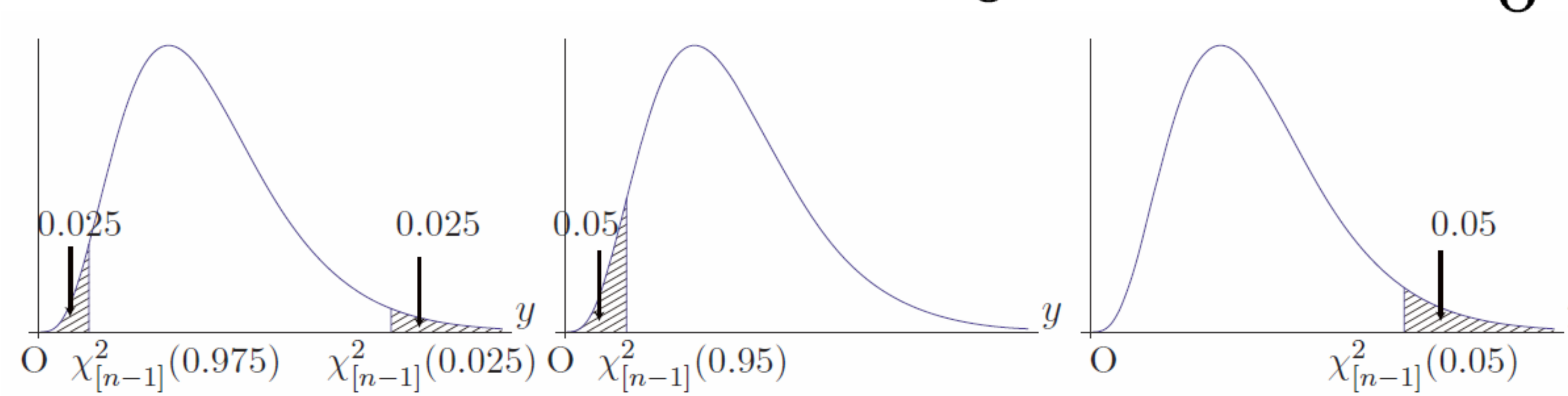
有意水準を 0.05 とすると，この問題の場合の棄却域は

H_1:$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ のとき，$(0, \chi^2_{[n-1]}(0.975)] \cup [\chi^2_{[n-1]}(0.025), \infty)$

H_1:$\sigma^2 < \sigma_0^2$ のとき，$(0, \chi^2_{[n-1]}(0.95)]$

H_1:$\sigma^2 > \sigma_0^2$ のとき，$[\chi^2_{[n-1]}(0.05), \infty)$

$$\sigma^2 \neq \sigma_0^2 \qquad \sigma^2 < \sigma_0^2 \qquad \sigma^2 > \sigma_0^2$$



公式 4.3（有意水準:0.05）

母集団分布:正規分布 N(μ,σ^2) について

帰無仮説 H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$　対立仮説 H_1: $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$

を有意水準 0.05 で検定する場合，検定統計量 Y および棄却域 W は

$$Y = (n-1) \times \frac{\text{不偏分散}}{\sigma_0^2}$$

$$W = (0, \chi^2_{[n-1]}(0.975)] \cup [\chi^2_{[n-1]}(0.025), \infty)$$

・検定方式

Y の実現値 y が W に含まれる

⇩

H_0 を棄却
(H_1 であると判断する.)

Y の実現値 y が W に含まれない

⇩

H_0 を棄却しない

例 4.5.

スナック菓子の内容量のデータで検定をしてみましょう.

不偏分散 $u_x^2 = 5.8$　　データの個数 $n = 40$

・仮説の設定

「内容量の母分散は 5 とは異なるかどうか」

↓

帰無仮説 H_0: $\sigma^2 = 5$　対立仮説 H_1: $\sigma^2 \neq 5$

・検定統計量 Y の実現値 y

$$y = (40 - 1) \times \frac{5.8}{5} = 45.24$$

・検定統計量 Y の実現値 y

$$y = (40-1) \times \frac{5.8}{5} = 45.24$$

・有意水準 0.05 の場合の棄却域

$$\begin{aligned} W &= (0, \chi^2_{[39]}(0.975)] \cup [\chi^2_{[39]}(0.025), \infty) \\ &= (0, 23.654] \cup [58.120, \infty) \end{aligned}$$

$y \fallingdotseq 45.24$ は棄却域に含まれないので, H_0 は**棄却されない**.

⇩

つまり,「**この生産ラインで製造されたスナック菓子の内容量の母分散は 5 であるといえないこともない**」と判断されます.

4.3. 2つの正規分布についての検定

例 4.6.

ある大学の1年生男子 16 人と女子 20 人をランダムに選び，
１日あたりの平均勉強時間（分）について調べた結果，

男子学生の標本平均 = 155.3
女子学生の標本平均 = 137.1

男子学生の勉強時間は女子学生より長いといっていいか?

仮説検定を行うことによって，この直感が裏付けられるか
どうか調べてみましょう.

・統計手法を当てはめる際の設定

第1母集団	第2母集団
母平均 μ_1	母平均 μ_2
母分散 σ_1^2	母分散 σ_2^2
データの個数 n_1	データの個数 n_2
標本平均$_1$, 不偏分散$_1$	標本平均$_2$, 不偏分散$_2$

・検定したい事柄

母平均 μ_1 と母平均 μ_2 が異なるかどうか.

母分散 σ_1^2 と母分散 σ_2^2 が異なるかどうか.

男子学生の勉強時間は女子学生より長いといっていいか.

男子学生の勉強時間の母平均: μ_1

は

女子学生の勉強時間の母平均: μ_2

より長いか.

母集団:

男子学生の全体　　女子学生の全体

母集団分布:

正規分布 $\mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$　　正規分布 $\mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$

4.3.1. 母平均の差の検定(母分散は既知の場合)

・母分散 σ_1^2, σ_2^2 は**既知**である

このとき,「母平均は異なるといえるかどうか」を検定する.

帰無仮説 H_0: $\mu_1 = \mu_2$ 対立仮説 H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$

を検定する問題を考えます.

・検定統計量

$$Z = \frac{\text{標本平均}_1 - \text{標本平均}_2}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

・帰無仮説　H_0: $\mu_1 = \mu_2$のもとでの Z の分布

帰無仮説 H_0: $\mu_1 = \mu_2$ のもとで,

$$Z = \frac{\text{標本平均}_1 - \text{標本平均}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

は　**標準正規分布　N(0,1)**　に従う.

・対立仮説 $\mu_1 \neq \mu_2$ のときの Z の取る値の傾向

$\mu_1 < \mu_2$ ⟹ 小さい値

$\mu_1 > \mu_2$ ⟹ 大きい値

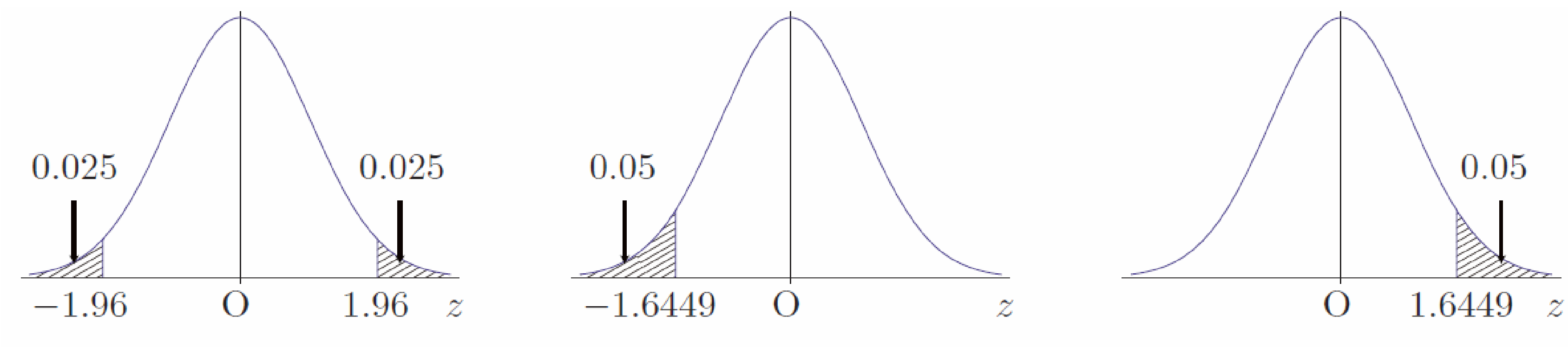
・棄却域

有意水準を 0.05 とすると, この問題の場合の棄却域は

$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ のとき, $(-\infty, -1.96] \cup [1.96, \infty)$

$H_1: \mu_1 < \mu_2$ のとき, $(-\infty, -1.6449]$

$H_1: \mu_1 > \mu_2$ のとき, $[1.6449, \infty)$



$\mu_1 \neq \mu_2$ $\mu_1 < \mu_2$ $\mu_1 > \mu_2$

公式 4.4（有意水準:0.05）

母集団分布:正規分布 $\mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$, $\mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ σ_1^2, σ_2^2 は既知.

帰無仮説　H_0: $\mu_1 = \mu_2$　　対立仮説　H_1:　$\mu_1 \neq \mu_2$

を有意水準 0.05 で検定する場合，検定統計量 Z および棄却域 W は

$$Z = \frac{\text{標本平均}_1 - \text{標本平均}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

$$W = (-\infty, -1.96] \cup [1.96, \infty)$$

・検定方式

Z の実現値 z が W に含まれる

⇩

H_0 を棄却

（H_1 であると判断する．）

Z の実現値 z が W に含まれない

⇩

H_0 を棄却しない

例 4.7

例 4.6 の勉強時間の例について検定してみましょう.

	標本平均	分散(既知)	データの個数
男子	$\bar{x}_1 = 155.3$	$\sigma_1^2 = 32.2^2$	$n_1 = 16$
女子	$\bar{x}_2 = 137.1$	$\sigma_2^2 = 32.2^2$	$n_2 = 20$

・仮説の設定

「男子学生のほうが女子学生より勉強時間が長いのではないか」

⇩

帰無仮説 H_0: $\mu_1 = \mu_2$　　対立仮説 H_1: $\mu_1 > \mu_2$

・検定統計量 Z の実現値 z

	標本平均	分散（既知）	データの個数
男子	$\bar{x}_1 = 155.3$	$\sigma_1^2 = 32.2^2$	$n_1 = 16$
女子	$\bar{x}_2 = 137.1$	$\sigma_2^2 = 32.2^2$	$n_2 = 20$

$$Z = \frac{\text{標本平均}_1 - \text{標本平均}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

$$z = \frac{155.3 - 137.1}{\sqrt{\frac{32.2^2}{16} + \frac{32.2^2}{20}}} \fallingdotseq 1.69$$

・検定統計量 Z の実現値 z

$$z = \frac{155.3-137.1}{\sqrt{\frac{32.2^2}{16}+\frac{32.2^2}{20}}} \fallingdotseq 1.69$$

・有意水準 0.05 の場合の棄却域

$$[1.6449, \infty)$$

$z \fallingdotseq 1.69$ は棄却域に含まれるので, H_0 は**棄却**されます.

⇩

つまり,
「**つまり, 男子学生のほうが女子学生より勉強時間が長い**」
と判断されます.

例 4.6. ある大学の1年生男子 16 人と女子 20 人をランダムに選び，１日あたりの平均勉強時間（分）について調べた結果，

男子学生の標本平均 = 155.3
女子学生の標本平均 = 137.1

男子学生の勉強時間は女子学生より長いといっていいか.

男子学生の勉強時間の母平均 μ_1 は女子学生の勉強時間の母平均 μ_2 より長いか.

母集団：男子学生の全体　　母集団：女子学生の全体

第1母集団分布：$N(\mu_1,\sigma_1^2)$　　第2母集団分布：$N(\mu_2,\sigma_2^2)$

１日あたりの平均勉強時間

・母平均の差の検定（母分散は未知）の手順

（0）最初に，$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ を確かめるために，
4.3.3 節にある「**等分散性の検定**」を行う

（1） 帰無仮説 H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ が棄却されない

↓

母平均の差の検定（**母分散は未知,等分散**）

（2） 帰無仮説 H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ が棄却される

↓

「ウェルチの検定」（ 4.3.4 節）

4.3.2. 母平均の差の検定（母分散は未知だが等しい場合）

2つの母集団からの観測値を考えます.

ただし，母分散 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ は未知であるが，

等しいことだけはわかっているとする.

このとき，母平均は異なるといえるかどうか，

帰無仮説 H_0: $\mu_1 = \mu_2$　対立仮説 H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$

を検定する問題を考えます.

・帰無仮説　$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ のもとでの T の分布

$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ のとき，帰無仮説 H_0: $\mu_1 = \mu_2$ のもとで，

$$T = \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}} \times \frac{\text{標本平均}_1 - \text{標本平均}_2}{U_t}$$

は**自由度 $n_1 + n_2 - 2$ の t 分布**に従うことが知られています．

ここで，

$$U_t = \sqrt{\frac{(n_1-1)\times\text{不偏分散}_1 + (n_2-1)\times\text{不偏分散}_2}{n_1+n_2-2}}$$

・対立仮説 $\mu_1 \neq \mu_2$ のときの T の取る値の傾向

$\mu_1 < \mu_2$ ⇒ 小さい値

$\mu_1 > \mu_2$ ⇒ 大きい値

・棄却域（有意水準を 0.05 ）

$$\mathrm{H}_1 \ : \ \mu_1 \neq \mu_2$$

$$W = (-\infty, -t_{[n_1+n_2-2]}(0.025)] \cup [t_{[n_1+n_2-2]}(0.025), \infty)$$

対立仮説 H_1: $\mu_1 < \mu_2$ ⇒ $W = (-\infty, -t_{[n_1+n_2-2]}(0.05)]$

対立仮説 H_1: $\mu_1 > \mu_2$ ⇒ $W = [t_{[n_1+n_2-2]}(0.05), \infty)$

公式 4.5（有意水準:0.05）

・**母集団分布:** $\mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2),\ \mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$

σ_1^2 と σ_2^2 は未知, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

・**仮説:**

帰無仮説 H_0: $\mu_1 = \mu_2$　対立仮説 H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$

・**検定統計量 T および棄却域 W（有意水準 0.05）:**

$$T = \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}} \times \frac{\text{標本平均}_1 - \text{標本平均}_2}{U_t}$$

$$W = (-\infty, -t_{[n_1+n_2-2]}(0.025)] \cup [t_{[n_1+n_2-2]}(0.025), \infty)$$

・**検定方式**

T の実現値 t が W に含まれる

⇩

H_0 を棄却

（H_1 であると判断する.）

T の実現値 t が W に含まれない

⇩

H_0 を棄却しない

4.3.3. 等分散性の検定

前節と同じく2つの母集団からの観測値を考えます.
ただし, 母平均 μ_1, μ_2 は未知であるとする.

このとき,

帰無仮説 $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 　対立仮説 $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

を検定する問題を考えます.

・帰無仮説のもとでの F の従う分布

帰無仮説 H_0: $\sigma_1{}^2 = \sigma_2{}^2$ のもとで,

$$F = \frac{\text{不偏分散}_1}{\text{不偏分散}_2}$$

は自由度 $(n_1 - 1, n_2 - 1)$ の F 分布に従うことが知られています.

・対立仮説 $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ のときの F の取る値の傾向

$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ ⟹ 小さい値

$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ ⟹ 大きい値

・有意水準 0.05 の棄却域

$$(0, F_{n_2-1}^{n_1-1}(0.975)] \cup [F_{n_2-1}^{n_1-1}(0.025), \infty)$$

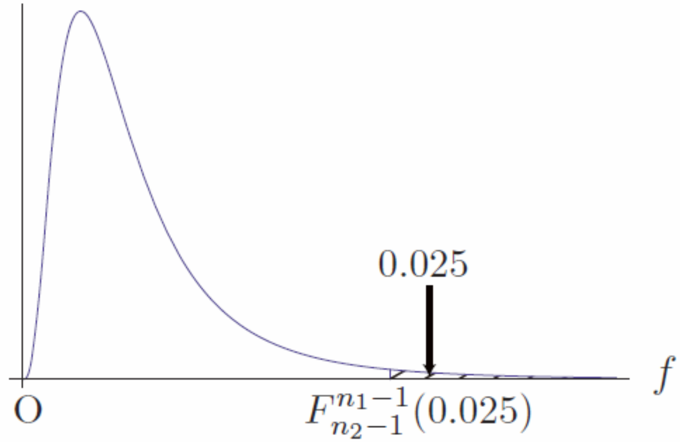
実際に検定をするときには，母集団を入れ替えて，
F の実現値 f が 1 以上になるようにします．

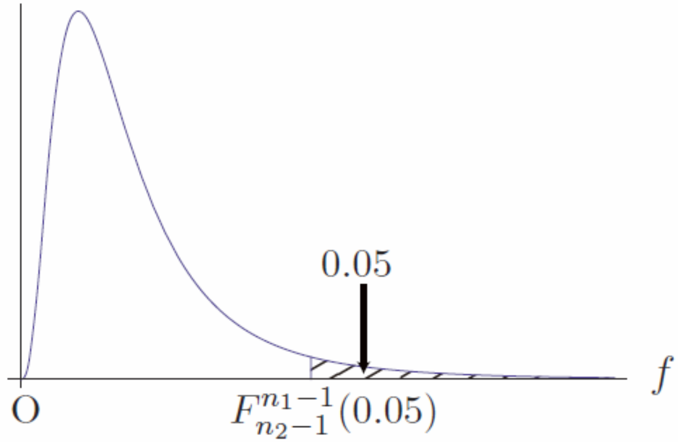
対立仮説 H$_1$: $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ は考えなくてもよいことになる

・棄却域

$$H_1 \ :\ \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \quad \Longrightarrow \quad W = [F_{n_2-1}^{n_1-1}(0.025), \infty)$$

$$H_1 \ :\ \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \quad \Longrightarrow \quad W = [F_{n_2-1}^{n_1-1}(0.05), \infty)$$





公式 4.6（有意水準:0.05）

母集団分布:正規分布 $\mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2), \mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$

帰無仮説 H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$　対立仮説 H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

を有意水準 0.05 で検定する場合，検定統計量 F および棄却域 W は

$$F = \frac{\text{不偏分散}_1}{\text{不偏分散}_2} \qquad W = [F_{n_2-1}^{n_1-1}(0.025), \infty)$$

ただし，$f \geq 1$.

・検定方式

F の実現値 f が W に含まれる

⇩

H_0 を棄却
（H_1 であると判断する.）

F の実現値 f が W に含まれない

⇩

H_0 を棄却しない

例 4.8.

例 4.6 の勉強時間の例について検定してみましょう.

	標本平均	分散(未知)	データの個数
男子	$\bar{x}_1 = 155.3$	$\text{不偏分散}_1 = 1256.3$	$n_1 = 16$
女子	$\bar{x}_2 = 137.1$	$\text{不偏分散}_2 = 816.7$	$n_2 = 20$

・仮説の設定

「男子学生のほうが女子学生より勉強時間が長いのではないか」

帰無仮説 H$_0$: $\mu_1 = \mu_2$　　対立仮説 H$_1$: $\mu_1 > \mu_2$

	分散(未知)	データの個数
男子	$\text{不偏分散}_1 = 1256.3$	$n_1 = 16$
女子	$\text{不偏分散}_2 = 816.7$	$n_2 = 20$

・検定統計量 F の実現値 f

$$f = \frac{1256.3}{816.7} \fallingdotseq 1.5 \geq 1$$

・有意水準 0.05 の場合の棄却域

$$W_1 = [F^{16-1}_{20-1}(0.025), \infty) = [2.617, \infty)$$

$f \fallingdotseq 1.5$ は棄却域に含まれないので，H_0 は**棄却されない**.

↓

つまり，「母分散が等しいといえないこともない」と判断されます.

次に, 4.3.2 節の検定($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ として)を行う.

	標本平均	分散(未知)	データの個数
男子	$\bar{x}_1 = 155.3$	$\text{不偏分散}_1 = 1256.3$	$n_1 = 16$
女子	$\bar{x}_2 = 137.1$	$\text{不偏分散}_2 = 816.7$	$n_2 = 20$

・仮説の設定

「男子学生のほうが女子学生より勉強時間が長いのではないか」

⇩

帰無仮説 H_0: $\mu_1 = \mu_2$　　対立仮説 H_1: $\mu_1 > \mu_2$

・検定統計量 T の実現値 t

	標本平均	分散(未知)	データの個数
男子	$\bar{x}_1 = 155.3$	$\text{不偏分散}_1 = 1256.3$	$n_1 = 16$
女子	$\bar{x}_2 = 137.1$	$\text{不偏分散}_2 = 816.7$	$n_2 = 20$

$$T = \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} \times \frac{\text{標本平均}_1 - \text{標本平均}_2}{U_t}$$

U_t の実現値は $u_t = \sqrt{\frac{(16-1)\times 1256.3 + (20-1)\times 816.7}{16+20-2}} \fallingdotseq 31.8$

$$t = \sqrt{\frac{16\times 20}{16+20}} \times \frac{155.3 - 137.1}{31.8} \fallingdotseq 1.7$$

・検定統計量 T の実現値 t

$$t = \sqrt{\frac{16\times 20}{16+20}} \times \frac{155.3-137.1}{31.8} \fallingdotseq 1.7$$

・有意水準 0.05 の場合の棄却域

$$W_2 = [t_{[16+20-2]}(0.05), \infty) = [1.691, \infty)$$

$z \fallingdotseq 1.7$ は棄却域に含まれるので，H_0 は棄却されます．

⇩

つまり，
「男子学生のほうが女子学生より勉強時間が長い」
と判断されます．

まとめ

- **1つの正規母集団** $N(\mu,\sigma^2)$ **に関する検定**

  母分散 σ^2 に関する検定（母平均 μ が未知の場合）
  公式 4.3

- **2つの正規母集団** $N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ **に関する検定**

  ２つの母平均 μ_1, μ_2 の差に関する検定
  （母分散 σ_1^2, σ_2^2 が既知の場合) **公式 4.4**
  (母分散 σ_1^2, σ_2^2 は未知だが等しい場合) 公式 4.5
  (等分散性 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ の検定) 公式 4.6