教養科目／B 自然の摂理の探求

2026 年度 統計学（集中１期）

第１３回

前回までの内容

１つの正規母集団 N(μ,σ^2) に関する検定

母平均 μ に関する検定（母分散 σ^2 が既知の場合）
公式 4.1

母平均 μ に関する検定（母分散 σ^2 が未知の場合）
公式 4.2

母分散 σ^2 に関する検定（母平均 μ が未知の場合）
公式 4.3

前回の内容

２つの正規母集団 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ に関する検定

２つの母平均 μ_1, μ_2 の差に関する検定

・母分散 σ_1^2, σ_2^2 既知の場合（公式 4.4）

・母分散 σ_1^2, σ_2^2 は未知であり, 等しいと仮定できる場合（公式 4.5）

等分散性 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ の検定（公式 4.6）

公式 4.5（有意水準:0.05）

母集団分布:正規分布 $\mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$, $\mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ は未知.

帰無仮説 H_0: $\mu_1 = \mu_2$ 対立仮説 H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$

を有意水準 0.05 で検定する場合，検定統計量 T および棄却域 W は

$$T = \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} \times \frac{標本平均_1 - 標本平均_2}{U_t}$$

$$W = (-\infty, -t_{[n_1+n_2-2]}(0.025)] \cup [t_{[n_1+n_2-2]}(0.025), \infty)$$

・検定方式

T の実現値 t が W に含まれる

⇩

H_0 を棄却

（H_1 であると判断する．）

T の実現値 t が W に含まれない

⇩

H_0 を棄却しない

公式 4.6（有意水準:0.05）

母集団分布:正規分布 $\mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$, $\mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$

帰無仮説 H$_0$: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$　対立仮説 H$_1$: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

を有意水準 0.05 で検定する場合，検定統計量 F および棄却域 W は

$$F = \frac{\text{不偏分散}_1}{\text{不偏分散}_2} \qquad W = [F_{n_2-1}^{n_1-1}(0.025), \infty)$$

ただし, $f \geq 1.$

・検定方式

F の実現値 f が W に含まれる

⇩

H$_0$ を棄却

(H$_1$ であると判断する.)

F の実現値 f が W に含まれない

⇩

H$_0$ を棄却しない

・母平均の差の検定（母分散は未知）の手順

（0）最初に，$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ を確かめるために，
4.3.3 節にある「等分散性の検定」を行う

（1） 帰無仮説 H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ が棄却されない

↓

母平均の差の検定（母分散は未知,等分散）

（2） 帰無仮説 H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ が棄却される

↓

「ウェルチの方法」（ 4.3.4 節）

4.3.4. 母平均の差の検定
（母分散は未知であり，等しいとは仮定できない場合）

母集団分布：正規分布 $\mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2),\ \mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$

ただし，

母分散 σ_1^2, σ_2^2 は未知であり，$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ が仮定できない
場合を考える.

このとき，母平均は異なるといえるかどうか，すなわち，

帰無仮説 H_0: $\mu_1 = \mu_2$ 　対立仮説 H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$

を検定する問題を考える.

「ベーレンス・フィッシャー問題」 **ウェルチの方法**

・帰無仮説　$H_0: \mu_1 = \mu_2$ のもとでの T の分布

帰無仮説 H_0: $\mu_1 = \mu_2$ のもとで,

$$T = \frac{\text{標本平均}_1 - \text{標本平均}_2}{\sqrt{\dfrac{\text{不偏分散}_1}{n_1} + \dfrac{\text{不偏分散}_2}{n_2}}}$$

は近似的に自由度 ν の t 分布に従うことが知られている.

ただし,

$$\nu = \frac{\left(\dfrac{\text{不偏分散}_1}{n_1} + \dfrac{\text{不偏分散}_2}{n_2}\right)^2}{\dfrac{(\text{不偏分散}_1)^2}{n_1^2(n_1-1)} + \dfrac{(\text{不偏分散}_2)^2}{n_2^2(n_2-1)}}$$

・対立仮説 $\mu_1 \neq \mu_2$ のときの T の取る値の傾向

$$\mu_1 < \mu_2 \longrightarrow$$ 小さい値

$$\mu_1 > \mu_2 \longrightarrow$$ 大きい値

・棄却域（有意水準を 0.05 ） $\mathrm{H}_1 \ : \ \mu_1 \neq \mu_2$

$$(-\infty, -t_{[\nu]}(0.025)] \cup [t_{[\nu]}(0.025), \infty)$$

自由度 ν は一般に整数ではなく, $t_{[\nu]}(0.025)$ の値を
t 分布表（数表3）から直接求めることはできない.

公式 4.7（有意水準:0.05）

母集団分布:正規分布 $\mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2), \mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$

σ_1^2, σ_2^2 は未知であり，等しいと仮定できない．

帰無仮説 H_0: $\mu_1 = \mu_2$　対立仮説 H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$

を有意水準 0.05 で検定する場合，検定統計量 T および棄却域 W は

$$T = \frac{\text{標本平均}_1 - \text{標本平均}_2}{\sqrt{\dfrac{\text{不偏分散}_1}{n_1} + \dfrac{\text{不偏分散}_2}{n_2}}}$$

$$W = (-\infty, -t_{[\nu]}(0.025)] \cup [t_{[\nu]}(0.025), \infty)$$

・検定方式

T の実現値 t が W に含まれる

⇩

H_0 を棄却

(H_1 であると判断する.)

T の実現値 t が W に含まれない

⇩

H_0 を棄却しない

例 4.9. ある大学の1年生をランダムに 36 人選び，1か月あたりの生活費を除く支出額（万円）についてアンケートをとりました．

	データの個数	標本平均	不偏分散
自宅通学	16	2.2	2.9
自宅外通学	20	2.4	0.8

ただし，それぞれの支出額は正規分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ に従うとする．

自宅通学と自宅外通学で，標本平均の違いはなさそうですが，不偏分散はかなり違っています．検定をしてみるとどうなるでしょう．

不偏分散の値はかなり異なっている. まず最初に, 等分散性の検定を有意水準 0.05 で行ってみましょう.

帰無仮説 H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$　対立仮説 H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

F の実現値 f は

$$f = \frac{2.9}{0.8} \fallingdotseq 3.6 \geq 1$$

有意水準 0.05 の棄却域は, 自由度 (15,19) の F 分布の上側 2.5% 点より,

$$W_1 = [2.617, \infty)$$

F の実現値 3.6 は棄却域に含まれるので, 帰無仮説 H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ は棄却される

つまり, $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ と判断される.

このことから，$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ として，ウェルチの方法によって，母平均の差の検定を行う.

帰無仮説　H_0: $\mu_1 = \mu_2$　　対立仮説　H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$

検定統計量 T の実現値 t は

$$t = \frac{2.2-2.4}{\sqrt{\frac{2.9}{16}+\frac{0.8}{20}}} \fallingdotseq -0.4$$

自由度は,

$$\nu = \frac{\left(\frac{2.9}{16}+\frac{0.8}{20}\right)^2}{\frac{2.9^2}{16^2(16-1)}+\frac{0.8^2}{20^2(20-1)}} \fallingdotseq 21.5$$

$t_{[21.5]}(0.025)$ の近似値を求める.

$$\nu \fallingdotseq 21.5 \quad \Rightarrow \quad n_S = 21, \quad n_L = 22$$

$t_S =$ 自由度 21 の t 分布の上側 2.5%点 $= 2.080$
$t_L =$ 自由度 22 の t 分布の上側 2.5%点 $= 2.074$

$$p = \frac{\nu - n_S}{n_L - n_S}$$

$$p = 21.5 - 21 = 0.5$$

・パーセント点の線形補間　$t_{[\nu]}(0.025) \fallingdotseq pt_L + (1-p)t_S$

$$\begin{aligned} t_{[21.5]}(0.025) &\fallingdotseq pt_L + (1-p)t_S \\ &= 0.5 \times 2.074 + 0.5 \times 2.080 = 2.077 \end{aligned}$$

すなわち，$t_{[21.5]}(0.025) \fallingdotseq 2.077$ となり，有意水準 0.05 の棄却域は

$$W_2 = (-\infty, -2.077] \cup [2.077, \infty)$$

T の実現値 -0.4 は棄却域に含まれないことから，

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

は棄却されない．

したがって，自宅通学と自宅外通学で支出額が等しいといえないこともないと判断される．

4.3.5. 対応があるデータの母平均の差の検定

例 4.10. ランダムに選んだ 15 人の1か月あたりの収入と支出（万円）

収入	2	2	2	5	3	1	1	6	5	2	2	6.5	5	4	5
支出	2	1.5	1.5	3	3	1	1	2	5	1	2	3.5	2	4	4
収入 - 支出	0	0.5	0.5	2	0	0	0	4	0	1	0	3	3	0	1

ここで，収入と支出はそれぞれ正規分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ に従うとする.

データは対としてとられていて，対応する観測値間の差(収入 – 支出)を改めて1つのデータとみなすと，本質的には1つの母集団の問題として扱える.

例. 各学生の右目の視力と左目の視力
　　各学生の１年生の成績と2年生の成績

それぞれの標本間に自然な対応がある場合を考える.

データの対の個数:n　母分散 σ_1^2, σ_2^2 は未知とする.

帰無仮説　H_0: $\mu_1 = \mu_2$　　対立仮説　H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$

を検定する問題を考える.

H_0 のもとで

$$T = \sqrt{\frac{n}{\text{差の不偏分散}}} \times \text{差の標本平均}$$

は**自由度 n-1 の t 分布に従う**ことが知られている.

公式 4.8.（有意水準：0.05）

母集団分布：2つの対応がある正規分布 $\mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$, $\mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ $(\sigma_1^2, \sigma_2^2$ は未知$)$.

帰無仮説 H_0: $\mu_1 = \mu_2$　対立仮説 H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$

を有意水準 0.05 で検定する場合，検定統計量 T および棄却域 W は

$$T = \sqrt{\frac{n}{\text{差の不偏分散}}} \times \text{差の標本平均}$$

$$W = (-\infty, -t_{[n-1]}(0.025)] \cup [t_{[n-1]}(0.025), \infty)$$

・検定方式

T の実現値 t が W に含まれる

⇩

H_0 を棄却

(H_1 であると判断する.)

T の実現値 t が W に含まれない

⇩

H_0 を棄却しない

例 4.11. 収入と支出の例について実際に検定してみましょう.

収入の範囲内に支出をおさえているか，すなわち

帰無仮説 H_0: $\mu_1 = \mu_2$　対立仮説 H_1: $\mu_1 > \mu_2$

を検定する.
対応するデータ間の差をとり,

差の標本平均 = 1.0,　差の不偏分散 = 1.8

となるので，検定統計量 T の実現値 t は

$$\sqrt{\frac{15}{1.8}} \times 1.0 \fallingdotseq 2.9$$

有意水準 0.05 の棄却域は，自由度 14 の t 分布の上側 5% 点から，

$$W = [1.761, \infty)$$

したがって，T の実現値 2.9 は棄却域 W に含まれることから，

H_0: $\mu_1 = \mu_2$ は棄却され，収入のほうが支出より多いと判断される.

4.4. ２項分布についての検定

4.4.1. 母比率の検定

工場の生産ラインでの不良品の発生率や機械の故障率など，ある事柄が起こる比率を知りたい場合を考える．

同じ実験を n 回繰り返し，

ある事柄が起こった場合 → 1
起こらなかった場合 → 0

とすると，各回の分布は2項分布 B(1,p) になる．

例

表が出る確率:p,
裏が出る確率:1-p
1 : 表が出る　0 : 裏が出る

→ Pr(X=1)=p,
Pr(X=0)=1-p

母集団分布 : ２項分布 B(1,p)

このとき，母比率 p について，

帰無仮説　H_0: $p = p_0$　　対立仮説　H_1: $p \neq p_0$

を検定する．ここで，p_0 はある値とする．

データの個数 n が大きいとき，中心極限定理より，
H_0: $p = p_0$ のもとで，

$$Z = \sqrt{\frac{n}{p_0(1-p_0)}} \times (\text{標本平均} - p_0)$$

は近似的に標準正規分布 N(0,1) に従うことが知られている．

・対立仮説　$p \neq p_0$　のときの Z の取る値の傾向

$p < p_0$ → 小さい値

$p > p_0$ → 大きい値

・棄却域（有意水準を 0.05 ）

$$(-\infty, -1.96] \cup [1.96, \infty)$$

・検定における近似の条件

$$np_0 \geq 5 \text{ かつ } n(1 - p_0) \geq 5$$

公式 4.9（有意水準:0.05）

母集団分布:2項分布 B(1,p)

帰無仮説 H_0: $p = p_0$ 　　対立仮説 H_1: $p \neq p_0$

を有意水準 0.05 で検定する場合，検定統計量 Z および棄却域 W は

$$Z = \sqrt{\frac{n}{p_0(1-p_0)}} \times (\text{標本平均} - p_0)$$

$$W = (-\infty, -1.96] \cup [1.96, \infty)$$

・検定方式

Z の実現値 z が W に含まれる

⇩

H_0 を棄却
（H_1 であると判断する．）

Z の実現値 z が W に含まれない

⇩

H_0 を棄却しない

例 4.12. 新入生から 80 人をランダムに選び, 47 人が大阪府出身者であった. これまでの大学全体の大阪府出身者の割合はおよそ30% である.

今年の入学生の大阪府出身者の比率はこれまでの割合に比べ高いといえるか. 今年の入学生の大阪府出身者の母比率を p とする(母集団は今年の入学生の全体).

帰無仮説 H_0 : $p = 0.3$ 　 対立仮説 H_1 : $p > 0.3$

n=80 で, 標本平均は $\bar{x} = 47/80$

Z の実現値 z は

$$z = \sqrt{\frac{80}{0.3 \times (1 - 0.3)}} \times \left(\frac{47}{80} - 0.3 \right) \fallingdotseq 5.6$$

有意水準 0.05 の棄却域 W は

$$W = [1.6449, \infty).$$

Z の実現値 5.6 は棄却域に含まれることから，H_0 : p=0.3 は棄却される.

したがって，
この年の新入生の大阪府出身者の比率はそれまでの大学全体の割合に比べ高いと判断される.

なお，近似の条件が成り立つことは簡単に確かめられる.

$$np_0 = 80 \times 0.3 = 24 \geq 5$$
$$n(1 - p_0) = 80 \times 0.7 = 56 \geq 5$$

4.4.2. 2つの母比率の差の検定

2つの母比率の違いを調べたい場合を考える.
つまり, 4.3 節のように母集団が2つあり, **母集団分布がそれぞれ2項分布 B(1,p_1), B(1,p_2) の場合**を考える.

第1母集団

母比率 p_1

$$\mathrm{B}(1, p_1)$$

データの個数: n_1
標本平均$_1$

第2母集団

母比率 p_2

$$\mathrm{B}(1, p_2)$$

データの個数: n_2
標本平均$_2$

母比率 p_1, p_2 について,

帰無仮説 $H_0: p_1 = p_2$　対立仮説 $H_1: p_1 \neq p_2$

を検定する.

n_1, n_2 がともに大きいとき, $H_0: p_1 = p_2$ のもとで,

$$Z = \frac{\text{標本平均}_1 - \text{標本平均}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$$

は**近似的に標準正規分布 N(0,1) に従う**ことが知られている.

- 帰無仮説のもとでの母比率 $p_1 = p_2$ の推定値:

$$\hat{p} = \frac{n_1 \times \text{標本平均}_1 + n_2 \times \text{標本平均}_2}{n_1 + n_2}$$

・対立仮説 $p_1 \neq p_2$ のときの Z の取る値の傾向

$p_1 < p_2$ → 小さい値

$p_1 > p_2$ → 大きい値

・棄却域（有意水準を 0.05 ）

$$(-\infty, -1.96] \cup [1.96, \infty)$$

・検定における近似の条件

$$n_1\hat{p} \geq 5,\ n_1(1-\hat{p}) \geq 5,\ n_2\hat{p} \geq 5,\ n_2(1-\hat{p}) \geq 5$$

公式 4.10（有意水準：0.05）

２つの2項分布 $\mathrm{B}(1,p_1),\ \mathrm{B}(1,p_2)$

帰無仮説　H_0: $p_1 = p_2$　　対立仮説　H_1:　$p_1 \neq p_2$

を有意水準 0.05 で検定する場合，検定統計量 Z および棄却域 W は

$$Z = \frac{\text{標本平均}_1 - \text{標本平均}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$$

$$W = (-\infty, -1.96] \cup [1.96, \infty)$$

・検定方式

Z の実現値 z が W に含まれる

⇩

H_0 を棄却

(H_1 であると判断する.)

Z の実現値 z が W に含まれない

⇩

H_0 を棄却しない

例 4.13. A 地域と B 地域に住む 50 代の男性からそれぞれ 1500 人をランダムに選び，BMI((体重 kg)/(身長 m)^2) が 25 以上(肥満)に分類される人の割合を調査した.

その結果，A 地域では 26%，B 地域では32% であった.

A 地域より B 地域のほうが肥満である人の割合が高いかどうかを有意水準 0.05 で検定する.

$$p_1 : \text{A 地域における肥満である人の母比率}$$

$$p_2 : \text{B 地域における肥満である人の母比率}$$

帰無仮説 $H_0: p_1 = p_2$　対立仮説 $H_1: p_1 < p_2$

の片側検定を行う.

$$n_1 = n_2 = 1500$$
$$\text{標本平均}_1 = 0.26$$
$$\text{標本平均}_2 = 0.32$$

$$\hat{p} = \frac{1500 \times 0.32 + 1500 \times 0.26}{1500 + 1500} = 0.29$$

Z の実現値 z は

$$z = \frac{0.26 - 0.32}{\sqrt{0.29 \times (1 - 0.29) \times \left(\frac{1}{1500} + \frac{1}{1500}\right)}} \fallingdotseq -3.62$$

近似の条件が成り立つことは簡単に確かめられる.

$$n_1\hat{p} = 1500 \times 0.29 = 435 \geq 5$$

$$n_1(1 - \hat{p}) = 1500 \times 0.29 = 1065 \geq 5$$

$$n_2\hat{p} = 1500 \times 0.29 = 435 \geq 5$$

$$n_2(1 - \hat{p}) = 1500 \times 0.29 = 1065 \geq 5$$

有意水準を 0.05 とすると，棄却域 W は

$$W = (-\infty, -1.6449].$$

Z の実現値 −3.62 は棄却域に含まれることから，

H_0: $p_1 = p_2$

は棄却される．

したがって，

B 地域における肥満の割合は A 地域より高い

と判断される．

まとめ(1/2)

2つの正規母集団 $N(\mu_1,\sigma_1^2), N(\mu_2,\sigma_2^2)$ **に関する検定**

２つの母平均 μ_1, μ_2 の差に関する検定

母分散 σ_1^2, σ_2^2 は未知であり,
等しいとは仮定できない場合　　　ウェルチの方法

・観測値に対応がある場合

２つの母平均 μ_1, μ_2 の差に関する検定

母分散 σ_1^2, σ_2^2 は未知の場合　　　公式 4.8

まとめ(2/2)

１つの母集団

母比率 p の検定　　公式 4.9

２つの母集団

母比率 p_1, p_2 の差に関する検定　　公式 4.10