「集合·位相」講義録

中神祥臣

2003 年 4 月 1 日初版
2005 年 4 月 1 日改訂
2008 年 4 月 1 日改訂

まえがき

「集合と位相」は数学で最も基本的な科目の一つであり、多くの数学科では必須科目またはそれに近い取り扱いをしている。しかし、この講義が一旦始まってみると、計算のような具体的体験を通して理解を深める部分よりも、抽象的な議論が大勢を占めるため、それまで数学に対して抱いていたイメージと初めて大きな隔たりを感じる数学でもある。このような体験はなにも数学に限らず、P. Picaso に代表されるキュービズム以降の絵画や、新しいタイプの音楽などを初めて接したときにも、同じような戸惑いを感じたのではなかっただろうか。絵画や音楽の場合には、様々な作品に親しむうちに構成力、調和やバランスなどがそこに的確に表現されていていることがわかってくるに従い、少しずつ面白みを感じられるようになってくるが、同じようなことが、数学についても言える。しかし、絵画や音楽と違うのは、数学の場合には自分の意志を相手に積極的に働きかけない限り、相手から何も情報が伝わってこないために、数学を楽しむには忍耐強い努力が必要になる。そこで、大勢の人がそれを手助けするための教科書を書いている。内容も初心者向きから、専門家でも楽しめるものまで、多種多様でどれも特色をもったものが多い。このような教科書の中から自分に合ったものを探すのも勉強の大切な一部である。

数学を勉強する目的の一つは、論理的な考え方を身につけるという意見がある。確かに、数学を正しく記述するには、論理というものを正しく使って、自分の主張を誤りなく相手に伝える必要がある。そのとき、そのような論理にはいろいろな選び方があるといったら、驚くかもしれない。しかし、論理はあくまでも言葉の仕組みを支配す基礎構造を抽出したものであるから、どのような観点からそれを捉えるかにより、このような違いが起こっても不思議ではない。数学ではもっぱら D. Hilbert による形式主義と呼ばれる、排中律を仮定した論理を使っていている[1]。したがって、その結果は選んだ論理構造に深く依存している。数学がこのような論理を選んだ最大の理由は単純明快だからだろうが、結果的には集合論の演算と密接に結びついていた点が大きいのだろう。その結果、複雑に絡み合った議論が、集合の演算という機械的な操作に置き換えることができ、言葉としては理解し難い状況も、集合の演算を通してその正しさを確認することができる。

このような論理と集合の関係は集合論のもつ一つの側面にすぎない。集合論が数学の中で果たした役割としては、無限というものを初めてわれわれの認識の射程の中に納めた功績が大きい。それまでは、洋の東西を問わず $1, 2, 3, \cdots$ と考えた延長線上にただ無限があると漠然と考えられていたのであるが、形式主義の論理に則っ取って考え直してみると、無限にもいろいろな大きさの無限があることが G. Cantor により示された。このような無限は論理を通じてのみ認識されるものであるから、そこに現れる困難は論理学の問題でもあり, 19 世紀末から 20 世紀の前半にかけての数学の中心課題の一つでもあった。しかし、現在では多くの問題の絡繰りが明らかにされ、現代の数学はゆるぎない信頼の基礎の上に組み

[1]数学者に排中律の使用を禁止するのは, 天文学者に望遠鏡を, ボクサーにグローブを禁止するようなものだ. (D.Hilbert:幾何学の基礎, 付録 IX)

立てられていることが確認されている。

この講義は集合だけでなく、その上で連続性に関する議論を論じることをも目的にしている。そのためには集合上に 20 世紀前半に M. Frechet, F. Hausdorff, C. Kuratowski 等により確立された「位相」という新たな構造を導入しなければならない。通常、位相の定義の仕方は大きく２つに分けられる。一つは直感的に親しみやすい距離空間をまず定義し、その取り扱いに慣れてから、一般の位相空間の導入を計るというものである。現在市販されている教科書の８，９割りはこのスタイルで書かれている。この方法は歴史的な流れにも沿っていて、われわれの理解の仕方から見ても無理はないのであるが、連続性を記述する段になると、例え距離から導入される位相を用いるにしても、本質的には 19 世紀前半に A. L. Cauchy により始められた ε-δ 論法的がその根底に横たわっており、最近の学生には馴染みにくい。また、距離から導入される位相に関する用語と、その後に、より一般な位相空間から導入される用語との間に混乱を来す人が少なくない。このような問題を避けるために、ここでは、いきなり位相空間の定義から初めて、距離空間の議論は後へもって行くことにした。このスタイルではいきなり位相という未知の対象を受け入れなければならないという問題はあるものの、これを受容しさえすれば、連続性の議論やそれに付随する議論が比較的簡単に取り扱えるようになり、距離空間はその特殊な場合であるとの認識が得易いのではないかと考えられるからである。

もちろん、このスタイルで書かれている優れた教科書[2]もあるが、ここでは敢えてそれを採用することはしなかった。その理由は、実用に支障のない範囲の、なるべく**少ない用語で位相空間の議論に慣れる**ことを心掛けたからである。したがって、１回の講義で新しく導入される基本用語 (キーワード) は 3, 4 にしてあり、そのときの講義の分量も **B4 用紙１枚**に納めてある。だから、半年間を通じてもせいぜい 40 前後の概念に習熟すれば済むようにしてある。これにより、ゆとりをもって、数学を学ぶ最大の目的である「数学を楽しむ」を実体験し、勉強のきっかけを掴んで欲しい。したがって、ここでは位相空間論の全体を丁寧に講義するということを放棄して、最小限の知識で、位相空間の取り扱いに慣れ、必要が生じたときには自分で、上にも挙げたより詳しい教科書を勉強してもらうという立場を取ることにした。

付録は本文を補足するために入れたもので、講義はしないつもりである。

集合 · 位相 I, 同演習：中神祥臣、堀江充子
集合 · 位相 II, 同演習：中神祥臣、久保淑子

平成 15 年 4 月 1 日

集合 · 位相 I, 同演習：中神祥臣、峰村勝弘

[2]竹之内　脩：入門集合と位相、実教出版。三村護・吉岡巌：位相数学入門、培風館。斉藤正彦：数学の基礎 — 集合 · 数 · 位相、東大出版。日本大学文理学部数学科編：数学基礎セミナー、日本評論社。

集合 · 位相 II, 同演習：中神祥臣、峰村勝弘
集合 · 位相 III, 同演習：久保淑子

平成 16 年 4 月 1 日

これまでの、２回の経験を踏まえ、本文の一部を書き換えるとともに、２年生の予備知識を超える例題、問題の一部を差し変えた。とくに、第２章の３節を２分して３節、４節にした。

集合 · 位相 I, 同演習：中神祥臣、今野良彦
集合 · 位相 II, 同演習：中神祥臣、今野良彦
集合 · 位相 III, 同演習：石塚瑞穂

平成 17 年 4 月 1 日

集合 · 位相 I, 同演習：中神祥臣、久保淑子
集合 · 位相 II, 同演習：中神祥臣、大枝一男
集合 · 位相 III, 同演習：石塚瑞穂

平成 18 年 4 月 1 日

集合 · 位相 I, 同演習：中神祥臣、林忠一郎
集合 · 位相 II, 同演習：中神祥臣、峰村勝弘
集合 · 位相 III, 同演習：今野良彦

平成 19 年 4 月 1 日

林忠一郎氏からたくさんの改訂のご提案をいただいたが、毎回見開きのページで済ませるという当初からの方針のために、そのごく一部しか取り入れることができなかった. また, いくつかの問題を入れ替え, 付録に Cantor 集合の補足を追加した.

集合 · 位相 I, 同演習：中神祥臣、福田恵美子
集合 · 位相 II, 同演習：中神祥臣、峰村勝弘
集合 · 位相 III, 同演習：今野良彦

平成 20 年 4 月 1 日

演習の時間に数学用語の記載箇所を尋ねられることが多くなったので索引を追加した.

平成 20 年 6 月 1 日

目 次

第1章　論理と集合

「人間のすべての認識は直感に始まり, 概念に進み, 理念におわる[1]」

1.1　論理と集合について

言葉は複数の人の間で情報の交換をするための道具であるが, 例えば「暖かい」という言葉を一つ取ってみても, その受け取り方は人によって様々に違う. このように, 伝えようとする情報がすべて正確に言葉で表現できるわけではないが, 通常は, 受け取り手が自分の経験の中から最も適切と思われる意味を汲み取ったり, 解釈し直したり, ときには軌道修正をしたりしながら, 相互の意志の疎通を計るのが一般的で, 少々意志の疎通を欠いたとしても, 大局的な情報の交換さえできれば, 日常生活の大勢に影響はない. しかし, 自然科学や社会科学などの学問の記述には, このような曖昧さは極力排除されるべきで, 記述内容に客観性をもたせることが要求される. とりわけ, 数学ではこのような曖昧さは一切許されない. そのために, そこで使われている論理は私たちが日頃使っている含みをもたせる言語と較べて, 柔軟性や潤いに欠ける部分はあるとはいえ, その分曖昧さの入り込む余地のない単純明快さをもっている. 意外なことに, このような論理の研究の歴史は古く Aristotle に遡るが, 現在のような命題論理や述語論理の定式化や普及に関しては B. Russel に負うところが大きいが, その完全性 (どの命題も真または偽のいずれか一方を証明することができる) は 1930 年になって初めて, 当時 23 歳の K. Gödel により証明され, 現在, これは命題論理と言われ, 数学では広く利用されている. そこで, その簡単な紹介を第 1 節で行う. その特徴は, すべての命題に対して, 主張が真かまたは偽であることを仮定し, 灰色の部分を排除する「排中律」を仮定している点である. したがって, 議論の鍵を握っている言葉に対しては, 例えそれが日常語であっても, 誰でもが間違いなく同じ意味に解釈できるように, 意味を限定して用いる. 思い立つことがあったら, 是非, 啓蒙書[2]や記号論理学のテキストで Gödel の理論の勉強をして欲しい.

数学を記述するには, 実はこのような命題論理だけではまだ不十分である. そこで, 引き続く 2 つの節ではこの論理を発展させた述語論理のエッセンスを簡単に説明する. 数学はこのような論理の海に浮かぶ一つの理論と考えられる. その遊泳術を身につけたければ, 自らを大海に投じて, 身をもって述語論理という遊泳の「こつ」を身につけるしか道はない.

私たちは有限でないものを無限と言っている. しかし, 沢山あるものが有限でないことを証明することは簡単なこととは思えない. にもかかわらず, Cantor は

[1] I.Kant:純粋理性批判, 原理論第 2 部, 第 2 章

[2] 竹内外史 : 集合とはなにか, ブルーバックス 298, 講談社

集合論を用いて, 無限集合の中にもさらなる大小関係があることを明らかにした. この議論を見る限り私たちにとって, 無限とは論理を通じて観念的にしか捉えられない概念であることがわかる. かって, L. Kronecker は集合論のもつこのような点を厳しく批判したが, Hilbert は「幾何学基礎論」を通じてこれを弁護し, 現在ではこの批判に組みする数学者が一人もいない程, 集合論は数学全体に深く浸透してしまっている. つまり, 無限という概念は論理の所産であって, 五感を通じて体験できる実体ではない. とはいえ, 私たちの住んでいるこの宇宙には無限と思われる世界がここかしこにあり, 例えば場の量子論に代表されるような物理学の記述には, 無限を含む論理や数学的理解が欠かせないことが広く認識されている. 集合論の功績はこれに止まらない. G. Boole に始まる論理を集合演算に書き換える考え方は現代数学にとって必要不可欠になっている. 排中律を認める論理の仕組みは集合演算そのものなのである. 複雑な論争が苦手な数学者でも, 集合の演算になれば得意な能力を発揮することができる. お陰で 1931 年には Gödel は自然数論を含むある体系に対して, それまでの論理学者が夢想だにしなかった「不完全性定理」の証明に成功した. これはまさに集合論的な考え方が納めた勝利の一つと言ってよいだろう. (余談ではあるが, 広島型の原爆と違った考えで長崎型の原爆が完成したとき, そのアイデアを評価した J. von Neumann は友人に「集合論の勝利だ」という手紙を書いている. [3]) 論理は私たちの経験の中から発見された一つの構造である. その構造が絶対的なものであるとの保証は何もない. しかし, これまではこれを信じ, これに頼って議論を発展させてきている. その結果, 半径 1 の球を適当に有限分割して組み直すと半径 2 の球ができあがるという Banach-Tarski の逆理[4]のように, 私たちの直感に合わない世界の存在が出現してくる. これは私たちの無限に対する理解が不十分であるためなのかもしれない. しかし, かって, I. Newton 力学を信じて自然を理解していたにもかかわらず, 相対論の発見によって, 自然はもっと複雑であることがわかったのと同じように, 排中律を仮定した論理には, まさかとは思うが, 自然理解に対する限界があるのかもしれない.

1959 年の C. L. Siegel から A. Weil 宛の手紙によれば, 「数学の堕落は, Riemann, Dedekint, Cantor らの理念と共に始まる. これによって, Euler, Lagrange, Gauss の堅実な精神は, だんだん抑圧されたのである. 」[5]

[3] ノーマン・マクレイ著：フォン・ノイマンの生涯, 朝日新聞社.

[4] 志賀浩二：無限からの光芒—ポーランド学派の数学者達, 日本評論社. 砂田利一：バナッハ–タルスキーのパラドックス, 岩波書店.

[5] デートレフ・ラウグビッツ著 (山本敦之訳)：リーマン — 人と業績 — , シュプリンガー・フェアラーク東京.

記号の説明

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$: 自然数全体のなす集合

$\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$: 整数全体のなす集合 (整数環)

$\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$

$\mathbb{Q} = \{m/n \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$: 有理数全体のなす集合 (有理数体)

$\mathbb{R}$: 実数全体のなす集合 (実数体)

$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

$\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$: 複素数全体のなす集合 (複素数体)

高校の教科書[6]から

数学 I

- 範囲がはっきりしたものの集まりを集合といい, 集合を作っている個々のものを, その集合の要素または元という. x が集合 A の要素であることを $x \in A$ と表す.
- 2つの集合 A, B の元がまったく一致しているとき, A と B は等しいといい, $A = B$ と書く.

数学 A

- 言葉や数式を使って述べた事柄があり, それが正しいか, 正しくないかが定まっている場合, その事柄を命題という. また, 命題が正しいとき, その命題はであるといい, 正しくない命題を偽であるという.
- 命題 $p \Rightarrow q$ に対して, 命題 $\neg q \Rightarrow \neg p$ を $p \Rightarrow q$ の対偶という.
- 命題 $p \Rightarrow q$ が真であることと, その対偶が真であることは同値である.
- ある事柄が成り立たないと仮定して矛盾を導くことにより, その事柄が成り立つことを示す方法がある. この証明法を背理法という.
- 対偶を利用する証明法は, 背理法の1つである.
- 数学的帰納法：自然数 n に関する命題が, すべての自然数について成り立つことを数学的帰納法で証明するには, 次の2つのことを示す.
  1. $n = 1$ のとき命題が成り立つ.
  2. $n = k$ のとき命題が成り立つことを仮定すると, $n = k + 1$ のときにも命題がなりたつ.

命題とその対偶の命題が同値であるということや、数学的帰納法は, ギリシャ文化が生み出した約束事である.

---

[6] 実教出版

1.2　命題論理

==

キーワード 1 かつ, または, ではない, ならば

==

主語と述語からなる文章をという．数学では命題は常に正しいかまたは正しくないものと仮定する．このことを排中律を仮定するといい, このような論理を形式主義の論理という．例えば,「2 は偶数である」という命題は正しいので, **真**またはその英語 True の頭文字と取って T であるという．「3 は偶数である」という命題は正しくないので**偽**またはその英語の False の頭文字を取って F であるという．

真偽のわかっている命題から新たな命題を作る 4 つの論理演算を導入する．命題 a, b に対して,

$$\begin{aligned} a \wedge b &: a \text{ かつ } b \\ a \vee b &: a \text{ または } b \\ \neg a &: a \text{ ではない} \\ a \Rightarrow b &: a \text{ ならば } b \end{aligned}$$

これらの新たな命題の真偽を次の表のように定める．いま a が真で, $a \Rightarrow b$ が真

a	b	$a \wedge b$	$a \vee b$	$\neg a$	$a \Rightarrow b$
T	T	T	T	F	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	T
F	F	F	F	T	T

表 1.1: 真理表 (Truth Table)

ならば, この表の第 1 行から b も真であることがわかる．また, b が偽で, $a \Rightarrow b$ が偽ならば, 第 2 行から, a が真であることがわかる．さらに, 排中律 $a \vee (\neg a)$ は真であり, 矛盾律 $a \wedge (\neg a)$ は偽であることもわかる．したがって, 矛盾律が導かれたときには, そこに到る推論に誤りが含まれていたことになる．

つぎに, $a \Rightarrow b$ と $b \Rightarrow a$ が同時に成り立つときには, a と b は**必要十分**または**同値**であるといい,

$$a \Longleftrightarrow b$$

で表すことにする．上の真理表 1.1 を見れば, a, b がともに T または F のときにのみ, $a \Longleftrightarrow b$ は T になることがわかる．

定理 1.2.1
1. $a \Rightarrow b$ とその対偶 $(\neg b) \Rightarrow (\neg a)$ は必要十分である．
2. $a \Rightarrow b$ と $(\neg a) \vee b$ は必要十分である．

証明　まず真理表を作る．表 1.1 により，対偶の行では $\neg b$ が T, $\neg a$ が F となるのは 2 行目だけで，他はすべて T である．したがって，次の表が得られる．こ

a	b	$\neg a$	$\neg b$	$a \Rightarrow b$	$(\neg b) \Rightarrow (\neg a)$	$(\neg a) \vee b$
T	T	F	F	T	T	T
T	F	F	T	F	F	F
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T

の表から，$a \Rightarrow b$ とその対偶の真偽が一致していることがわかるので，主張 1 が成り立つ．また，$\neg a$, b がともに F になるのは 2 行目だけであるから，最後の列はこの場合は F, 他はすべて T である．したがって，$a \Rightarrow b$ と $(\neg a) \vee b$ の真偽も一致していることがわかり，主張 2 が示された．■

問題 1 真理表を作って次の 2 つの命題は必要十分であることを示せ．

1. (べき等法則) $a \wedge a$ と a. (また $a \vee a$ と a)
2. (交換法則) $a \wedge b$ と $b \wedge a$. (また $a \vee b$ と $b \vee a$)
3. (結合法則) $(a \wedge b) \wedge c$ と $a \wedge (b \wedge c)$. (また $(a \vee b) \vee c$ と $a \vee (b \vee c)$)
4. (分配法則) $a \wedge (b \vee c)$ と $(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$. (また $a \vee (b \wedge c)$ と $(a \vee b) \wedge (a \vee c)$)
5. (二重否定の法則) $\neg(\neg a)$ と a
6. (de Morgan の法則) $\neg(a \wedge b)$ と $(\neg a) \vee (\neg b)$. (また $\neg(a \vee b)$ と $(\neg a) \wedge (\neg b)$)

問題 2 真理表を作って次の命題は真であることを示せ．

1. $(a \wedge b) \Rightarrow a$
2. $a \Rightarrow (a \vee b)$
3. $(a \Rightarrow b) \Rightarrow ((b \Rightarrow c) \Rightarrow (a \Rightarrow c))$
4. $(a \Rightarrow c) \Rightarrow ((b \Rightarrow c) \Rightarrow ((a \vee b) \Rightarrow c))$
5. $(a \wedge (a \Rightarrow b)) \Rightarrow b$
6. $((a \vee c) \Rightarrow b) \Rightarrow (c \Rightarrow (a \vee b))$

問題 3 真理表を作って次の 2 つの命題は必要十分であることを示せ．

1. $a \Rightarrow (b \wedge c)$ と $(a \Rightarrow b) \wedge (a \Rightarrow c)$
2. $(a \vee b) \Rightarrow c$ と $(a \Rightarrow c) \wedge (b \Rightarrow c)$
3. 偽の命題 c に対して，$a \Rightarrow b$ と $a \Rightarrow (b \vee c)$

1.3　述語論理

==

キーワード 2 全称記号, 存在記号

==

復習 1　1. 論理記号 $\vee$, $\wedge$, $\neg$, $\Rightarrow$, 真理表

2. $(a \Rightarrow b) \Longleftrightarrow (\neg a) \vee b$

==

変数を含む文章を**述語**という．例えば,「x は偶数である」という文章は述語である．この変数に対して限定記号と呼ばれる 2 つの**全称記号**と**存在記号**を導入する．

$$\forall\, x : \text{すべての } x \text{ に対して} \cdots$$
$$\exists\, x : \cdots \text{となる } x \text{ が存在する}$$

述語 $p(x)$ にこれらの記号を付けると命題が得られる．命題

$$\forall\, x : p(x)$$

は「**すべての $\boldsymbol{x}$ に対して $\boldsymbol{p(x)}$ が真である**」ことを意味し, これが成り立つときには真, そうでないときには偽とする．命題

$$\exists\, x : p(x)$$

は「すべての x に対して $p(x)$ が偽である」ときには偽とする．したがって, そうでないときには真を意味する．(つまり「ある x に対して $p(x)$ が真である」こと, 言い換えれば「**$\boldsymbol{p(x)}$ が真である $\boldsymbol{x}$ が存在する**」ことを意味し, これが成り立つときには真, そうでないときには偽とする．)

通常, 変数 x に対してはその動く範囲を指定するのが一般的で, 例えば「x^2+x は偶数である」という命題 $p(x)$ を x が自然数の範囲で考えるときには,

$$\forall\, x : x \in \mathbb{N} \Rightarrow p(x), \qquad \exists\, x : x \in \mathbb{N} \wedge p(x)$$

のように記述するが, それぞれ

$$\forall\, x \in \mathbb{N} : p(x), \qquad \exists\, x \in \mathbb{N} : p(x)$$

のように略記することが多い．

任意の n 個の命題 $p_1, \cdots, p_n$ に対して, 添え字 i を変数と見なすことにより,

$$(\forall\, i \in \{1, \cdots, n\} : p_i) \Longleftrightarrow p_1 \wedge \cdots \wedge p_n$$
$$(\exists\, i \in \{1, \cdots, n\} : p_i) \Longleftrightarrow p_1 \vee \cdots \vee p_n$$

したがって, 問題 1 の de Morgan の法則は次のように書き換えられる.

$$\neg(\forall\ i \in \{1, \cdots, n\} : p_i) \Longleftrightarrow \exists\ i \in \{1, \cdots, n\} : \neg p_i$$
$$\neg(\exists\ i \in \{1, \cdots, n\} : p_i) \Longleftrightarrow \forall\ i \in \{1, \cdots, n\} : \neg p_i$$

この法則は次のようなもっと一般的な形で使われることが多い.

定理 1.3.1 次の関係が成り立つ.

1. $\neg(\forall\ x : p(x)) \Longleftrightarrow \exists\ x : \neg p(x)$
2. $\neg(\exists\ x : p(x)) \Longleftrightarrow \forall\ x : \neg p(x)$
3. $\neg(\forall\ x \in A : p(x)) \Longleftrightarrow \exists\ x \in A : \neg p(x)$
4. $\neg(\exists\ x \in A : p(x)) \Longleftrightarrow \forall\ x \in A : \neg p(x)$

証明　主張 2 は二重否定の法則により主張 1 からわかるので, 主張 1 だけを示す.

$$\neg(\forall\ x : p(x))\text{は偽} \Longleftrightarrow (\forall\ x : p(x))\ \text{は真} \Longleftrightarrow \text{すべての}\ x\ \text{に対して}\ p(x)\ \text{は真}$$
$$\Longleftrightarrow \text{すべての}\ x\ \text{に対して}\ \neg p(x)\ \text{は偽} \Longleftrightarrow (\exists\ x : \neg p(x))\ \text{は偽}$$

ゆえに, $\neg(\forall\ x : p(x))$ と $\exists\ x : \neg p(x)$ のいずれか一方が真で, 他方が偽となることはない. よって, 一方が真ならば, 他方も真となり、両者の真理値は一致する. これで, 主張 1 がわかる. 主張 3 は主張 1 と定理 1.2.1 からの結果 $\neg(x \in A \Rightarrow p(x)) \Longleftrightarrow ((x \in A) \wedge (\neg p(x)))$ よりわかる. 主張 4 も同様である. ■

問題 4　　1. 次のことを真偽を用いて直接示せ.

a. $\forall\ x : p(x) \wedge q(x) \Longleftrightarrow (\forall\ x : p(x)) \wedge (\forall\ x : q(x))$

b. $\exists\ x : p(x) \vee q(x) \Longleftrightarrow (\exists\ x : p(x)) \vee (\exists\ x : q(x))$

2. de Morgan の法則と 1 の a を使って, b を示せ.

一般に,

$$(p_1 \wedge \cdots \wedge p_n) \vee (q_1 \wedge \cdots \wedge q_n) \Rightarrow (p_1 \vee q_1) \wedge \cdots \wedge (p_n \vee q_n)$$
$$(p_1 \wedge q_1) \vee \cdots \vee (p_n \wedge q_n) \Rightarrow (p_1 \vee \cdots \vee p_n) \wedge (q_1 \vee \cdots \vee q_n)$$

が成り立つ. このことを踏まえて, 次の問題 5 の 1, 2 を考えよ.

問題 5 次のことを示せ.

1. $((\forall\ x : p(x)) \vee (\forall\ x : q(x))) \Rightarrow \forall\ x : p(x) \vee q(x)$ は成り立つが逆は必ずしも成り立たない.
2. $(\exists\ x : p(x) \wedge q(x)) \Rightarrow ((\exists\ x : p(x)) \wedge (\exists\ x : q(x)))$ は成り立つが逆は必ずしも成り立たない.
3. $(\forall\ x : p(x)) \vee q \Longleftrightarrow \forall\ x : p(x) \vee q$
4. $(\exists\ x : p(x)) \wedge q \Longleftrightarrow \exists\ x : p(x) \wedge q$

1.4　多変数の述語論理

==

復習 2　1. 全称記号, 存在記号

2. de Morgan の法則

==

2 変数の述語 $p(x,y)$ に 2 つ限定記号を付ける場合には, 例えば

$$\forall\, x \in X : (\exists\, y \in Y : p(x,y))$$

のようになるが, 通常は括弧を省いて

$$\forall\, x \in X\ \exists\, y \in Y : p(x,y)$$

のように表すのが一般的である. 他の限定記号の組み合わせの場合も同様である.

例題 1.4.1 日本女子大学と早稲田大学の学生の集合をそれぞれ, N, W とする. x は y と友達であるという文章 $p(x,y)$ に限定記号を付けて得られる 4 つの主張の違いを考えてみよう.

1. $\forall\, x \in N\ \forall\, y \in W : p(x,y)$
2. $\forall\, x \in N\ \exists\, y \in W : p(x,y)$
3. $\exists\, x \in N\ \forall\, y \in W : p(x,y)$
4. $\exists\, x \in N\ \exists\, y \in W : p(x,y)$

上から順に, つぎのことを意味している.

1. 日本女子大学の学生はどの人も早稲田大学のすべての学生と友達である.
2. 日本女子大学の学生はどの人も早稲田大学の学生に友達がいる.
3. 日本女子大学の学生には早稲田大学のすべての学生と友達の人がいる.
4. 日本女子大学の学生には早稲田大学の学生に友達がいる.

この 4 つの命題の違いは次のように行列 (あるいはグラフ) にしてみると識別し易い. N の元を縦に, W の元を横に並べ, N の i 番目の学生と W の j 番目の学生が友達であるかないかにより, $t_{ij} = 1$ または 0 とおいて得られる行列 (t_{ij}) を (隣接行列) T とする. これは要素に 0 と 1 だけをもつ行列である. 主張 1 は T の要素がすべて 1 ということである. 主張 2 は 各行ベクトルが零ではないということである. 主張 3 はどこかの行の要素はすべて 1 ということである. 主張 4 は $T \neq 0$ である.

例題 1.4.2 上の例の中の 1 番目と 4 番目では, 全称記号どうし, 存在記号どうしの順序を入れ換えても意味は変わらないが, 2 番目と 3 番目では, 全称記号と存在記号を入れ換えると意味が違ってくる. 例えば 2 番目では

1. $\forall\, x \in N \;\exists\, y \in W : p(x,y)$

2. $\exists\, y \in W \;\forall\, x \in N : p(x,y)$

上から順に, つぎのことを意味している.
1. 日本女子大学の学生はどの人も早稲田大学の学生に友達がいる.
2. 早稲田大学の学生には日本女子大学のすべての学生と友達の人がいる.

この 2 つの文章で, 主張 2 が成り立てばいつでも主張 1 も成り立つが, 逆は言えない.

以下の議論では, $\forall\, x \in \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$ を $\forall\, x > 0$ と略記することが多い.

例題 1.4.3 「どんな正数 x, y に対しても, $y \le nx$ を満たす自然数 n が存在する」というもっともな文章を限定記号を使って書き表すと

$$\forall\, x > 0 \;\forall\, y > 0 \;\exists\, n \in \mathbb{N} : y \le nx$$

これを否定すると,

$$\exists\, x > 0 \;\exists\, y > 0 \;\forall\, n \in \mathbb{N} : y > nx$$

となるので, 「正数の組 x, y で, どんな自然数 n に対しても $y > nx$ を満たすものが存在する」という信じ難い文章が得られる.

問題 6 次の Fermat 予想 (1995 年に A. Wiles が解決) を文章で述べよ.

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : (n > 2 \Rightarrow \neg(\exists\, x \in \mathbb{N} \;\exists\, y \in \mathbb{N} \;\exists\, z \in \mathbb{N} : x^n + y^n = z^n))$$

問題 7 次の双子素数の存在予想 (未解決) を文章で述べよ. 素数の集合 $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \cdots\}$ を P とする. このとき,

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \;\exists\, p \in P : (p \ge n) \wedge (p + 2 \in P)$$

問題 8 集合 N, W や文章 p は上のように定め, さらに, x は y よりも歳下であるという文章を $q(x,y)$ とする. このとき, 次の命題を文章で述べよ.

1. $\forall\, x \in N \;\exists\, y \in W : p(x,y) \wedge q(x,y)$

2. $\exists\, x \in N \;\forall\, y \in W : p(x,y) \vee q(x,y)$

3. $\forall\, x \in N \;\exists\, y \in W : p(x,y) \Rightarrow q(x,y)$

4. $\forall\, x \in N \;\exists\, y \in W : \neg p(x,y)$

問題 9 数列 $\{a_n\}$ が a へ収束すること

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \;\forall\, n \in \mathbb{N} : n \ge n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

の否定を書け.

1.5　論理と集合

==

キーワード 3 和集合, 共通部分, 補集合, 包含関係

==

集合論は無限の中に階層性があることを論理的に明らかにした数学としてそれ自身重要であるが, 論理を形式的な集合演算に帰着させ, Gödel, Cohen らの研究を通して, Aristotle 以来の論理学の限界を明確化した点は特筆に値する. また, 集合論は 20 世紀の数学を記述する言語として欠かせなかっただけでなく, 論理的な厳密性を形式的な計算に帰着させる道具としてこれまで果たしてきた役割も大切である.

例題 1.5.1

$$n(x) : x \text{ は日本女子大の学生である}$$

という述語 n を考えてみよう. この述語が真である, つまりこの述語が成り立つ x を全部集めて得られる集合を

$$N = \{x \mid n(x)\}$$

で表す. このとき, 命題 $n(x)$ の真, 偽は集合 N を用いて, $x \in N$ または $x \notin N$ と表せる.

$$x \in N \iff n(x) \text{ は真}$$

この対応関係を用いて, 論理演算を集合の演算に書き換えてみよう. 述語 p, q で決まる集合

$$A = \{x \mid p(x)\} \quad B = \{x \mid q(x)\}$$

に対して, それらの共通部分, 和集合, 補集合を

$$A \cap B = \{x \mid p(x) \land q(x)\}$$
$$A \cup B = \{x \mid p(x) \lor q(x)\}$$
$$A^c = \{x \mid \neg\, p(x)\}$$

で定義する. さらに, 包含関係

$$A \subset B$$

を「$\forall\, x : p(x) \Rightarrow q(x)$」で定義し, 「$A$ は B に含まれる」または 「B は A を含む」または「A は B の部分集合である」という. ここまでで得られた論理記号と集合の演算記号との関係を表にすると,

論理記号	$\land$	$\lor$	$\neg$	$\Rightarrow$
集合演算の記号	$\cap$	$\cup$	^{c}	$\subset$

となる．さらに，よく使われる差集合を

$$A \setminus B = \{x \mid p(x) \wedge \neg q(x)\}$$

で定義し，集合が等しいこと，つまり

$$A = B$$

を「$\forall\, x : p(x) \iff q(x)$」で定義する．これは「$(A \subset B) \wedge (B \subset A)$」と同値である．

添え字をもつたくさんの集合の和集合や共通部分を表す記号を導入する．

$$\bigcap_{i\in I}\{x \mid p_i(x)\} = \{x \mid \forall\, i \in I : p_i(x)\}$$
$$\bigcup_{i\in I}\{x \mid p_i(x)\} = \{x \mid \exists\, i \in I : p_i(x)\}$$

I が有限集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ (または $\mathbb{N}$) の場合には，上の集合を，それぞれ

$$\bigcap_{i=1}^{n}\{x \mid p_i(x)\}, \quad \bigcup_{i=1}^{n}\{x \mid p_i(x)\}$$
$$\left(\text{または } \bigcap_{i=1}^{\infty}\{x \mid p_i(x)\}, \quad \bigcup_{i=1}^{\infty}\{x \mid p_i(x)\}\right)$$

で表す．

問題 10 述語 $p_i(x)$ $(i = 1, \cdots, n)$ に対して，次の式を示せ．

1. $\bigcap_{i=1}^{n}\{x \mid p_i(x)\} = \{x \mid p_1(x)\} \cap \cdots \cap \{x \mid p_n(x)\}$
2. $\bigcup_{i=1}^{n}\{x \mid p_i(x)\} = \{x \mid p_1(x)\} \cup \cdots \cup \{x \mid p_n(x)\}$

問題 11 閉区間 $[0, 1]$ 上で，関数列 $\{f_n\}$ が各点ごとに関数 f へ収束すること，つまり $\forall\, x \in [0, 1] : f_n(x) \to f(x)$ は，任意の $\varepsilon > 0$ に対して次の式が成り立つことと同値であることを示せ．

$$[0, 1] = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq m} \{x \in [0, 1] \mid |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\}$$

日常使われている「または」の意味には 2 通りあって，ここで使っている記号 $\vee$ に対応するものは「包含的 (Inclusive)」といわれているものである．この他に「私は明日は東京または横浜にいる」というときの「または」は，東京にいるときには横浜にいないし，横浜にいるときには東京にいないということで，同時に東京と横浜にいることはないということが言外に含まれている．このような「または」を排他的 (Exclusive) であるという．これは次のように書ける．

$$(p(x) \wedge \neg q(x)) \vee (q(x) \wedge \neg p(x))$$

または

$$x \in (\{y \mid p(y)\} \setminus \{y \mid q(y)\}) \cup (\{y \mid p(y)\} \setminus \{y \mid q(y)\})$$

1.6　集合の演算

==

キーワード 4 de Morgan の法則, 対称差集合, 集合族

==

復習 3　1. 排他的「または」

==

集合の演算規則を復習しておこう．$\neg(x \in A)$, $\neg(A \subset B)$ をそれぞれ

$$x \notin A, \qquad A \not\subset B$$

で表すことにする．全体集合 X の部分集合 A に対して, 集合

$$\{x \mid (x \in A) \wedge p(x)\}$$

を

$$\{x \in A \mid p(x)\}$$

と表すことが多い．全体集合 X と空集合 $\emptyset$ を

$$X = \{x \mid x = x\}, \qquad \emptyset = \{x \mid x \neq x\}$$

で定める．X の部分集合 $A,\ B$ に対して,

$$\begin{aligned}
A \cap B &= \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\} \\
A \cup B &= \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\} \\
A^c &= \{x \mid x \notin A\} \\
A \setminus B &= \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\} \\
A \subset B &\iff (\forall\, x : x \in A \Rightarrow x \in B)
\end{aligned}$$

と定義した.

問題 12 次の関係式を示せ.

1. $A = B$ は $\forall\, x : x \in A \iff x \in B$ と同値である.
2. (べき等法則) $A \cap A = A,\ A \cup A = A$
3. (交換法則) $A \cap B = B \cap A,\ A \cup B = B \cup A$
4. (結合法則) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$．これを $A \cap B \cap C$ で表す.
5. (結合法則) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$．これを $A \cup B \cup C$ で表す.
6. (単位元の存在) $A \cap X = A,\ A \cup \emptyset = A$

7. (分配法則) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
8. (分配法則) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
9. $(A^c)^c = A$
10. (de Morgan の法則) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$, $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
11. $A \subset B \Longleftrightarrow A^c \cup B = X \Longleftrightarrow A \cap B = A$. ただし, X は全体集合である.
12. $A \subset B \Longleftrightarrow B^c \subset A^c \Longleftrightarrow A \cup B = B$

論理の排他的「または」に相当する集合として, つぎの対称差集合がある.

問題 13 全体集合 X の部分集合 A, B に対してその対称差集合を

$$A \ominus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

で定義すれば, 次の式が成り立つことを示せ.

1. (交換法則) $A \ominus B = B \ominus A$
2. (結合法則) $(A \ominus B) \ominus C = A \ominus (B \ominus C)$
3. (単位元の存在) $A \ominus \emptyset = A$
4. (逆元の存在) $A \ominus A = \emptyset$
5. $A \ominus X = A^c$

集合 X の部分集合全体の集合を X の**べき集合**といい, $\mathcal{P}(X)$ で表す. 例えば, $X = \{1, 2, 3\}$ のべき集合は

$$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, X\}$$

である. $\mathcal{P}(X)$ の部分集合は集合を元にもっている. このように集合を元にもつ集合を**集合族**ともいう.

問題 14 n 個の元からなる集合のべき集合は 2^n 個の元からなることを示せ.

X の部分集合からなる集合族 $\{A_i \mid i \in I\}$ に対して,

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall\, i \in I : x \in A_i\}$$
$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists\, i \in I : x \in A_i\}$$

と定義した.

問題 15 つぎの式を示せ.

1. $(\bigcap_{i \in I} A_i)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$
2. $(\bigcup_{i \in I} A_i)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c$
3. $(\bigcap_{i \in I} A_i) \cup B = \bigcap_{i \in I}(A_i \cup B)$
4. $(\bigcup_{i \in I} A_i) \cap B = \bigcup_{i \in I}(A_i \cap B)$

1.7　直積と選択公理

==

キーワード 5 直積, 選択公理,

==

復習 4 q が偽の命題ならば, p と $p \vee q$ は同値である.

==

1.7.1　積に順番があるとき

集合 $X,\ Y$ の元から定まる対の集合

$$\{(x, y) \mid (x \in X) \wedge (y \in Y)\}$$

を X と Y の**直積集合**または単に直積といい, $X \times Y$ で表す. 例えば, 円周 S^1 と区間 $I = [0, 1]$ の直積集合 $S^1 \times I$ は茶筒のような曲面を与える. とくに, $X = Y$ のときには, 直積を X^2 で表すことが多い. 3 以上の有限個の集合の直積も同様に定義される. 例えば, n 次元の Euclid 空間は $\mathbb{R}^n$ と表される. 可算個の集合 $X_1, X_2, \cdots$ の直積も同様に

$$\prod_{n=1}^{\infty} X_n = \{(x_1, x_2, \cdots) \mid \forall\ n \in \mathbb{N} : x_n \in X_n\}$$

により定義される. これは $X_1 \times X_2 \times \cdots$ とも表される.

例題 1.7.1 $A,\ B$ がともに空でないときには,

$$A \times B \subset X \times Y \iff (A \subset X) \wedge (B \subset Y)$$

実際, $A,\ B$ は空ではないから, $\forall\ a : a \notin A$, $\forall\ b : b \notin B$ はともに偽である.

$$\begin{aligned}
\text{左辺} \iff & \forall\ (a, b) : (a, b) \in A \times B \Rightarrow (a, b) \in X \times Y \\
\iff & \forall\ a\ \forall\ b : ((a \in A) \wedge (b \in B)) \Rightarrow ((a \in X) \wedge (b \in Y)) \\
\iff & \forall\ a\ \forall\ b : \neg(a \in A) \vee \neg(b \in B) \vee ((a \in X) \wedge (b \in Y)) \\
\iff & \forall\ a\ \forall\ b : (\neg(a \in A) \vee \neg(b \in B) \vee a \in X) \\
& \quad \wedge (\neg(a \in A) \vee \neg(b \in B) \vee b \in Y) \\
\iff & (\forall\ a\ \forall\ b : \neg(a \in A) \vee \neg(b \in B) \vee a \in X) \\
& \quad \wedge (\forall\ a\ \forall\ b : \neg(a \in A) \vee \neg(b \in B) \vee b \in Y) \\
\iff & (\forall\ a : \neg(a \in A) \vee (\forall\ b : b \notin B) \vee a \in X) \\
& \quad \wedge (\forall\ b : (\forall\ a : a \notin A) \vee \neg(b \in B) \vee b \in Y) \\
\iff & (\forall\ a : \neg(a \in A) \vee a \in X) \wedge (\forall\ b : \neg(b \in B) \vee b \in Y) \\
\iff & (\forall\ a : a \in A \Rightarrow a \in X) \wedge (\forall\ b : b \in B \Rightarrow b \in Y) \iff \text{右辺}
\end{aligned}$$

問題 16 次のことを示せ.

1. $X \times Y = \emptyset \iff (X = \emptyset) \vee (Y = \emptyset)$
2. $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$
3. $(A \times Y) \cup (B \times Y) = (A \cup B) \times Y$
4. $X = \bigcup_{i \in I} A_i$ かつ $Y = \bigcup_{j \in J} B_j$ ならば, $X \times Y = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} A_i \times B_j$

問題 17 単位円 $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ の直積 $\mathbb{T}^2$ が 2 次元トーラスと見なせる理由を述べよ.

問題 18 直積集合 $\cdots \times X_{-1} \times X_0 \times X_1 \times X_2 \times \cdots$ の元の決め方を述べよ.

1.7.2 積に順番がないとき

つぎに, 一般の集合族 $\{X_i \mid i \in I\}$ の直積を考える. 添え字集合 I が自然に 1 列に並んでいるときには, 直積を上のように定義すればよい. しかし, I に自然な並び方が与えられていない場合もある. このような場合にも直積を考え, しかもその元を各 $i \in I$ 座標の元 $x_i \in X_i$ を用いて $(x_i)_{i \in I}$ と表したい. しかし, 添え字が 1 列に並んでいないために, 各座標 $i \in I$ ごとに X_i の元 x_i を選ぶことができても, その全体からなる元 $(x_i)_{i \in I}$ を手順を追って見つける手立てがない. そこで, この部分には次の公理を用いることにする.

公理 1.7.2 (選択公理 (Zermelo)) 空でない集合のなす集合族 $\{X_i \mid i \in I\}$ に対して, 各 X_i からその元 $x_i \in X_i$ をすべての $i \in I$ に対して一斉に取り出すことができる.

つまり, 任意の集合 I からある集合 X のべき集合 $\mathcal{P}(X)$ の中への写像 $f : I \to \mathcal{P}(X)$ (写像の定義は次節参照) で

$$\forall\, i \in I : f(i) \neq \emptyset$$

を満たすものがあれば, $g(i) \in f(i)$ を満たす写像 $g : I \to X$ が存在することを保証している. これは, 後に集合の濃度の議論をするときなどに必要になる.

この公理を使うと, 集合族 $\{X_i \mid i \in I\}$ の直積が

$$\prod_{i \in I} X_i = \{(x_i)_{i \in I} \mid \forall\, i \in I : x_i \in X_i\}$$

により定義される. このときの元 $(x_i)_{i \in I}$ は (x_i) と略記されることもある.

ここで, 積に順番があるときと無いときの記法

$$\prod_{n=1}^{\infty} X_n = X_1 \times X_2 \times \cdots, \qquad \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$$

の違いに注意して欲しい.

1.8　写像

==

キーワード 6　写像, 単射, 全射

==

定義 1.8.1 集合 X の各元に集合 Y の元を一意的に対応させる対応 f を X から Y への**写像**といい, $f : X \to Y$ で表す．このとき, X の元 x に対して定まる Y の元 $f(x)$ を f による x の**像**という．

例えば, $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x) = x^2$ は各 $x \in \mathbb{R}$ に対して関数の値 $f(x) \in \mathbb{R}_+$ が一意的に定まるから $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}_+$ への写像であるが, $\mathbb{R}_+$ 上の逆関数 $g(x) = \pm\sqrt{x}$ は２価関数で値が一意的には決まらないので写像とは言わない．

定義 1.8.2 集合 X から集合 Y への写像 f が

$$\forall\, x \in X\ \forall\, y \in X : x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

を満たすときは**単射**であるといい，また

$$\forall\, y \in Y\ \exists\, x \in X : y = f(x)$$

を満たすときは**全射**であるという．全射かつ単射のときには**全単射**であるという．

単射または全射である写像を単に, 単射, 全射ともいう．単射のことを**１対１の**写像, 全射のことを**上への**写像ともいう．

例題 1.8.3 $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ への写像 f について次のことを示せ．

1. $f(x) = x^2$ は全射ではあるが, 単射ではない．
2. $f(x) = e^x$ は単射ではあるが, 全射ではない．

例題 1.8.4 $x \in [0, 1]$ の２進小数表示を

$$x = 0.x_1x_2x_3x_4\cdots \quad (x_i \in \{0, 1\})$$

とする．x が２進有理数の場合には, $0.1 = 0.01111\cdots$ のように, 有限表示と無限表示の両方をもつものがある．上の x の表示に対して,

$$y = 0.x_1x_3x_5\cdots, \quad z = 0.x_2x_4x_6\cdots$$

とおく．x が２進有理数で２つの表示をもつときは, 有限表示を用いるものとすれば,

$$f : x \in [0, 1] \to (y, z) \in [0, 1] \times [0, 1]$$

なる写像が得られる．ただし, 有限表示の場合には後方をずっと 0 にしておく．実はこの写像 f は全射である．実際, $(y, z) \in [0, 1] \times [0, 1]$ に対して, y または z

が有限 2 進有理数で 2 つの表示をもつ場合には有限表示を使うことにして, 上の逆を辿れば, $f(x) = (y, z)$ を満たす $x \in [0, 1]$ が得られる. しかし,

$$f(0.x_1 0 x_3 1 x_5 1 x_7 1 \cdots) = f(0.x_1 1 x_3 0 x_5 0 x_7 0 \cdots)$$

となるので, f は単射ではない.

例題 1.8.5 閉区間 $[0, 1]$ の部分集合

$$C = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \mid \forall\, n \in \mathbb{N} : a_n = 0 \text{ または } a_n = 2 \right\}$$

を Cantor (**の 3 進**) **集合**という. この集合から $[0, 1]$ への写像

$$f\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_n/2)}{2^n}$$

は全射であるが, 単射ではない. 実際,

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} = f\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{3^n} \right) = f\left(\frac{1}{3}\right)$$

定義 1.8.6 写像 $f : X \to Y$ と写像 $g : Y \to Z$ に対して定まる X から Z への写像 $x \in X \mapsto g(f(x)) \in Z$ を f と g の**合成写像**といい, $g \circ f$ で表す.

問題 19 合成写像は結合法則 $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ を満たすことを示せ.

命題 1.8.7 写像 $f : X \to Y$ が全単射であるための必要十分条件は合成写像 $g \circ f$ および $f \circ g$ がそれぞれ X, Y 上の恒等写像となるような写像 $g : Y \to X$ が存在することである.

証明 必要性は明らかであるから, 十分性だけを示す. 任意の x_1, x_2 に対して, $x_1 \neq x_2$ ならば, $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$ であるから, $f(x_1) \neq f(x_2)$. また任意の $y \in Y$ に対して, $f(g(y)) = y$ であるから, $x = g(y)$ とすれば, $f(x) = y$ となる X の元 x が存在する. よって, f は全単射である. ■

この命題の写像 g の一意性は容易にわかるので, これを f の**逆写像**といい, f^{-1} で表す.

問題 20

1. $f \circ g$ が全射のとき, f も全射であることを示せ. $f \circ g$ が全射でも, g は全射でない例を挙げよ.
2. $f \circ g$ が単射のとき, g も単射であることを示せ. f が単射でない例を挙げよ.

1.9 写像の像と逆像

==

キーワード 7 写像の像, 逆像

==

復習 5

1. $\exists\, x : p(x) \vee q(x) \Longleftrightarrow (\exists\, x : p(x)) \vee (\exists\, x : q(x))$
2. $\exists\, x : p(x) \wedge q(x) \Longrightarrow (\exists\, x : p(x)) \wedge (\exists\, x : q(x))$
3. 写像, 単射, 全射, 逆写像の定義

==

写像 $f : X \to Y$ が全単射のときには, 逆写像 $f^{-1} : Y \to X$ が存在し, しかもこの写像も全単射であった. Y の部分集合 B に対して, 集合

$$\{f^{-1}(y) \in X \mid y \in B\} = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

を $f^{-1}(B)$ で表すが, このような集合の表し方を f が全単射でない場合にまで拡張しておく.

定義 1.9.1 写像 $f : X \to Y$ に対して,

1. X の部分集合 A に対して定まる Y の部分集合 $\{f(x) \mid x \in A\}$ を A の f による**像**といい, $f(A)$ で表す.
2. Y の部分集合 B に対して定まる X の部分集合 $\{x \in X \mid f(x) \in B\}$ を B の f による**逆像**といい, $f^{-1}(B)$ で表す.

逆像の定義に逆写像と同じ記号 f^{-1} が使われているが, 逆写像を表しているわけではない. 実際, f が全単射でない限り逆写像は存在しない. 紛らわしいが, 前後の関係から意味を取り違えることはない.

問題 21

1. $\mathbb{R}$ における関数 $f(x) = x^2$ に対して, 区間 $[0, 1]$ の f による像と逆像を求めよ.
2. $\mathbb{R}$ における関数 $f(x) = x^3 - x$ に対して, 区間 $[0, 1]$ の f による像と区間 $[0, 15/8]$ の逆像を求めよ.
3. X 上の実数値関数 f に対して $f^{-1}((a, \infty)) = \{x \in X \mid f(x) > a\}$ を示せ.

定理 1.9.2 写像 $f : X \to Y$ と X の部分集合 A_1, A_2 に対して,

1. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
2. $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$. f が単射のときは等号が成り立つ.
3. f が単射ならば, $f(A_1 \setminus A_2) = f(A_1) \setminus f(A_2)$

証明 主張 2 を示す.

$$
\begin{aligned}
y \in & f(A_1 \cap A_2) \Longleftrightarrow \exists\, x : (x \in A_1 \cap A_2) \wedge (f(x) = y) \\
& \Longleftrightarrow \exists\, x : ((x \in A_1) \wedge (x \in A_2)) \wedge (f(x) = y) \\
& \Longleftrightarrow \exists\, x : ((x \in A_1) \wedge (f(x) = y)) \wedge ((x \in A_2) \wedge (f(x) = y)) \\
& \Longrightarrow (\exists\, x : (x \in A_1) \wedge (f(x) = y)) \wedge (\exists\, x : (x \in A_2) \wedge (f(x) = y)) \\
& \Longleftrightarrow (y \in f(A_1)) \wedge (y \in f(A_2)) \\
& \Longleftrightarrow y \in f(A_1) \cap f(A_2)
\end{aligned}
$$

主張 1, 3 も同様にして示すことができる. ■

定理 1.9.3 写像 $f : X \to Y$ と Y の部分集合 B_1, B_2 に対して,

1. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
2. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
3. $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$

証明 主張 1 を示す.

$$
\begin{aligned}
x \in & f^{-1}(B_1 \cup B_2) \Longleftrightarrow f(x) \in B_1 \cup B_2 \Longleftrightarrow (f(x) \in B_1) \vee (f(x) \in B_2) \\
& \Longleftrightarrow (x \in f^{-1}(B_1)) \vee (x \in f^{-1}(B_2)) \Longleftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)
\end{aligned}
$$

主張 2, 3 も同様にして示すことができる. ■

問題 22

1. 写像 $f : X \to Y$ と X の部分集合 A に対して, 以下のことを示せ.
   a. $f(A)^c \cap f(X) \subset f(A^c)$
   b. f が単射ならば, $f(A)^c \cap f(X) = f(A^c)$
2. 定理 1.9.2 の主張 1, 3 の証明をせよ.
3. 定理 1.9.2 の主張 2 で等号が成り立たない例を挙げよ.
4. 定理 1.9.2 の主張 3 で f が単射でないと, 等号が成り立たない例を挙げよ.
5. 定理 1.9.3 の主張 2, 3 の証明をせよ.

問題 23 集合 X から集合 Y への写像の全体のなす集合を Y^X と表すことにすれば, Y^X から直積集合 $\prod_{x \in X} Y_x$ への全単射が存在することを示せ. ただし, 各 $x \in X$ に対して $Y_x = Y$.

1.10　関係 — 同値関係

==

キーワード 8 同値関係, 同値類,

==

「友達の友達はまた友達」という関係を考えてみよう.

定義 1.10.1 集合 X において, 3 条件

1. $\forall\, x \in X : x \sim x$
2. $\forall\, x, y \in X : x \sim y \Rightarrow y \sim x$
3. $\forall\, x, y, z \in X : ((x \sim y) \wedge (y \sim z)) \Rightarrow x \sim z$

を満たす関係 $\sim$ を**同値関係**という. とくに, $x \sim y$ のとき, x は y と**同値**であるという.

この同値関係は, 2 つの命題が必要充分であるときに使われる同値とは違う新たな概念である. x と同値な X の元全体からなる集合

$$c(x) = \{y \in X \mid y \sim x\}$$

を x の**同値類**といい, x をその**代表元**という. $y \sim x$ ならば, $c(y) = c(x)$ となるので, 同値類のどの元も代表元になることができる.

定義 1.10.2 集合 X に同値関係 $\sim$ が与えられたとき, 同値類全体のなす集合を $X/\sim$ で表す.

例題 1.10.3 $\mathbb{Z}$ において, $x - y$ が偶数のとき, $x \sim y$ とする. 偶数全体の集合 $\{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ を $2\mathbb{Z}$ とすれば,
1. $x - x \in 2\mathbb{Z}$ であるから, $x \sim x$.
2. $x \sim y$ ならば, $y - x = -(x - y) \in 2\mathbb{Z}$ となるから, $y \sim x$.
3. $x \sim y$ かつ $y \sim z$ ならば, $x - z = (x - y) + (y - z) \in 2\mathbb{Z}$ となるから, $x \sim z$.
ゆえに, $\sim$ は同値関係である. このとき, 同値類は $c(0) = 2\mathbb{Z}$, $c(1) = 2\mathbb{Z} + 1$ と表せる. ただし, $2\mathbb{Z} + 1$ は奇数全体の集合で, $X/\sim = \{c(0), c(1)\}$ となる.

問題 24 Euclid 幾何において次の関係は同値関係であることを示せ.

1. 2 つの直線が平行である.
2. 2 つの三角形は合同である.
3. 2 つの三角形は相似である.

例題 1.10.4 Euclid 空間 $\mathbb{R}^2$ はベクトル空間である．これを平面上で図示するときには矢印を使うことが多いが，これには注意を要する．実は平面上の矢印全体の集合において，平行移動で互いに重なり合うものどうしを同値と見たときの同値類がベクトルであって，矢印はその代表元である (ベクトルは方向と大きさだけで決まる)．とくに原点から出ている矢印またはその先端の座標を位置ベクトルといい，通常の代数的演算 (加法と定数倍) はこれを用いてなされる．

問題 25

1. ($\mathbb{Z}$ の構成) $\mathbb{N}^2$ の 2 元 $(m,n),(m',n')$ が条件 $m+n'=n+m'$ を満たすとき $(m,n)\sim(m',n')$ とすれば，これは同値関係である．このとき，自然な写像 $n\in\mathbb{Z}\mapsto c((n,0))\in\mathbb{N}^2/\sim$ は全単射である．
2. ($\mathbb{Q}$ の構成) $C(\mathbb{Z})=\mathbb{Z}^2\setminus(\mathbb{Z}\times\{0\})$ の 2 の元 $(p,q),(p',q')$ が条件 $pq'=qp'$ を満たすとき $(p,q)\sim(p',q')$ とすれば，これは同値関係である．このとき，自然な写像 $p/q\in\mathbb{Q}\mapsto c((p,q))\in C(\mathbb{Z})/\sim$ は全単射である．

問題 26 次のことを示せ．

1. 実ベクトル空間 X とその部分ベクトル空間 Y に対して，$x-y\in Y$ のとき，$x\sim y$ とすれば，この関係 $\sim$ は X における同値関係である．このとき，同値類 $c(x)$ は $x+Y=\{x+y\mid y\in Y\}$ と表せる．また，$X/\sim$ は演算
$$ac(x)+bc(y)=c(ax+by)\quad(a,b\in\mathbb{R})$$
によりまた実ベクトル空間になる．これを X の Y による商ベクトル空間といい，X/Y と表すのが一般的である．
2. 2×2 実行列の全体を M_2 とする．$A,B\in M_2$ に対して，$B=XAX^{-1}$ を満たす正則行列 $X\in M_2$ が存在するとき，$A\sim B$ と表せば，関係 $\sim$ は同値関係であることを示せ．
3. 各実数 a に対して集合 $\{an\mid n\in\mathbb{Z}\}$ を $a\mathbb{Z}$ で表す．自然数 p,q,r に対して，次のことを示せ．
   a. p は q の約数である $\Leftrightarrow$ $q\mathbb{Z}\subset p\mathbb{Z}$
   b. r は p と q の最小公倍数である $\Leftrightarrow$ $r\mathbb{Z}=p\mathbb{Z}\cap q\mathbb{Z}$
   c. r は p と q の最大公約数である $\Leftrightarrow$ $r\mathbb{Z}=p\mathbb{Z}+q\mathbb{Z}$．ただし，$p\mathbb{Z}+q\mathbb{Z}=\{pm+qn\mid m,n\in\mathbb{Z}\}$
4. p を正の整数とする．整数 m,n に対して，$m-n\in p\mathbb{Z}$ のとき，$m\sim n$ とすれば，この関係は同値関係である．$i=0,1,\cdots,p-1$ を代表元のもつ同値類を $c(i)$ とすれば，$c(i)+c(j)=c(i+j)$, $c(i)c(j)=c(ij)$ が成り立つ．さらに，p が素数のときには，$c(i)c(j)=c(0)$ ならば，$c(i)=c(0)$ または $c(j)=c(0)$ となる．

1.11　無限集合

==

キーワード 9 有限, 無限,

==

復習 6　1. 同値関係, べき集合, 写像の性質

==

空集合または有限個の元からなる集合を**有限**集合, そうでない集合を**無限**集合という. 集合 A の部分集合 B が $A \neq B$ を満たすとき, B は A の**真部分集合**であるという.

命題 1.11.1 X が無限集合であるための必要十分条件は X から X の真部分集合への全単射が存在することである.

有限集合 C の元を順に並べて,

$$c_1, c_2, \cdots, c_n$$

とすれば, $\{1, 2, \cdots, n\}$ から C への全単射 $k \mapsto c_k$ が存在する. このことを $\{1, 2, \cdots, n\} \sim C$ で表す. 一般にも, 集合 A から B への全単射が存在するときには, $A \sim B$ と表すことにする. この関係 $\sim$ は同値関係である. 集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ を代表元としてもつ同値類の各元はどれも n 個の元からなる集合である. 同様なことを無限集合に対しても考えてみよう. 集合 A, B がともに無限集合のときには, いつでも $A \sim B$ となるだろうか. 残念なことに, そのようなことは言えないことを Cantor は示した. この事実は, 無限の中にはまだ私達に未知な世界が存在することを示し, 新しい数学の１ページが開かれることになった.

定理 1.11.2 (Cantor) 集合 X からそのべき集合 $\mathcal{P}(X)$ へ単射は存在するが, 全単射は存在しない.

証明　写像 $x \in X \mapsto \{x\} \in \mathcal{P}(X)$ は単射である. つぎに, X から $\mathcal{P}(X)$ への全単射 f が存在したとする.

$$A = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$$

とすれば, $A \in \mathcal{P}(X)$ であるから,

$$f(a) = A \tag{1.1}$$

を満たす $a \in X$ が存在する. もし $a \in f(a)$ ならば, A の作り方により, $a \notin A$. したがって, (1.1) 式により, $a \notin f(a)$ となり矛盾する. もし $a \notin f(a)$ ならば, A の作り方により, $a \in A$. したがって, $a \in f(a)$ となり矛盾する. ■

つぎに全単射が存在する例を挙げてみよう.

例題 1.11.3 $\mathbb{N}^2$ から $\mathbb{N}$ への 2 つの写像

$$f(m,n) = \frac{(m+n-2)(m+n-1)}{2} + m, \quad g(m,n) = 2^{m-1}(2n-1)$$

はともに全単射である.

例題 1.11.4 開区間 $(0,1)$ から半開区間 $(0,1]$ への写像 f を各 $x \in [1/2^n, 1/2^{n-1})$ $(n \in \mathbb{N})$ に対して,

$$f(x) = -x + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}$$

とすれば, f は全単射である.

定理 1.11.5 (Bernstein) 集合 X, Y に対して, X から Y への単射と, Y から X への単射が存在すれば, $X \sim Y$ つまり X から Y への全単射が存在する.

証明 X から Y への単射を f, Y から X への単射を g とする. X の任意の部分集合 A に対して,

$$h(A) = X \setminus g(Y \setminus f(A)) \tag{1.2}$$

とすれば, h はべき集合 $\mathcal{P}(X)$ から自分自身への写像である. $A \subset B$ ならば, $Y \setminus f(B) \subset Y \setminus f(A)$ となるので, $h(A) \subset h(B)$ となり, h は単調増加である. つぎに, 集合族 $\{A \in \mathcal{P}(X) \mid A \subset h(A)\}$ を $\mathcal{F}$ とする. $\emptyset \in \mathcal{F}$ であるから, $\mathcal{F}$ は空ではない. そこで, $C = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$ とする. 任意の $A \in \mathcal{F}$ に対して, $A \subset h(A) \subset h(C)$ が成り立つので, $C \subset h(C)$. 両辺を h で写して $h(C) \subset h(h(C))$ も成り立ち, $h(C) \in \mathcal{F}$. 集合 C の作り方により, $h(C) \subset C$. よって, $h(C) = C$. これと (1.2) 式で $A = C$ としたものより, $X \setminus C = g(Y \setminus f(C))$. ここで, X から Y への写像 F を

$$F(x) = \begin{cases} g^{-1}(x) & (x \in X \setminus C) \\ f(x) & (x \in C) \end{cases}$$

とすれば, F は全単射である. ただし, g^{-1} は $g(Y)$ から Y への逆写像である. ■

問題 27 次の集合の間に全単射が存在することを示せ.

1. 整数の集合 $\mathbb{Z}$ と偶整数の集合 $2\mathbb{Z} = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$
2. 開区間 $(-1,1)$ と実数の集合 $\mathbb{R}$
3. 開区間 $(0,1)$ と閉区間 $[0,1]$

問題 28

1. 例題 1.11.4 を Bernstein の定理を用いて示せ.
2. 例題 1.8.4 を参考にして, $[0,1] \times [0,1]$ から $[0,1]$ への全単射が存在することを示せ.

1.12　集合の濃度

==

キーワード 10　可算, $\aleph_0$, $\aleph_1$

==

復習 7　1. 同値関係, 全単射, Bernstein の定理

==

有限集合の個数に相当する概念を, 無限集合の場合へ拡張し, **濃度**という概念を導入する. そのとき, 同値関係

$$A \sim B \Longleftrightarrow \exists\, f : A \to B \quad \text{全単射}$$

により定まる同値類の各元に対しては同じ濃度を与え, 同値でない元には違った濃度を与えることにする. つまり, 濃度とは集合がどの同値類に属するかを区別するための呼称である.

定義 1.12.1 有限集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ の濃度を n とする. 自然数の集合 $\mathbb{N}$ の濃度を $\aleph_0$ (アレフ零と読む)[7], そのべき集合 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ の濃度を $\aleph_1$, そのまたべき集合 $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ を $\aleph_2, \cdots$ と順次決めて行き, 各 $k \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\underbrace{\mathcal{P}(\mathcal{P}(\cdots(\mathcal{P}}_{k}(\mathbb{N}))\cdots)) \text{ の濃度を } \aleph_k$$

と定める.

公理 1.12.2 (一般連続体仮説) $\aleph_{k-1}$ と $\aleph_k$ の間の濃度は存在しない.

問題 29 次の集合の濃度は $\aleph_0$ であることを示せ.

1. $2\mathbb{N} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $2\mathbb{N} - 1 = \{2n - 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$
2. $\mathbb{Z}$
3. $\mathbb{Q}$
4. $\mathbb{N}$ の無限部分集合.

命題 1.12.3　1. 無限集合は濃度 $\aleph_0$ の部分集合をもつ.

2. 無限集合 X の部分集合 Y に対して, $X \setminus Y$ が無限集合で Y の濃度が $\aleph_0$ ならば, X と $X \setminus Y$ は同じ濃度をもつ.

証明　1. 数学的帰納法による. 2. $X \setminus Y$ は無限集合であるから, その部分集合 Z で濃度が $\aleph_0$ のものがある. $Y \cup Z$ から Z への全単射と $X \setminus (Y \cup Z)$ 上での恒等写像を用いて, X から $X \setminus Y$ への全単射を作る. ■

[7] $\aleph$ はヘブライ語のアルファベットの最初の文字である.

命題 1.12.4 各集合 A_n $(n \in \mathbb{N})$ の濃度が $\aleph_0$ ならば, 和集合 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ の濃度も $\aleph_0$ である.

証明 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ とする. 仮定により, 各 n に対して全単射 $f_n : \mathbb{N} \to A_n$ が存在する. このとき, 写像 $n \in \mathbb{N} \mapsto f_1(n) \in A$ は単射である. また, $f(m,n) = f_n(m)$ とすれば, f は $\mathbb{N}^2$ から A への全射である. したがって, 例題 1.11.3 により, 全射 $g : \mathbb{N} \to A$ が存在する. 集合族 $\{g^{-1}(\{a\}) \mid a \in A\}$ に対して選択公理と適用すると, 代表元 $n_a \in g^{-1}(\{a\})$ が選べるので, 単射 $a \in A \mapsto n_a \in \mathbb{N}$ が得られる. よって, Bernstein の定理により, A の濃度は $\aleph_0$ である. ■

問題 30 $\mathbb{N}$ のすべての有限部分集合のなす集合族 $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ の濃度は $\aleph_0$ であることを示せ.

例題 1.12.5 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して X_n を集合 $\{0,1\}$ のコピーとする. このとき, 直積集合 $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ からべき集合 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ への写像

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n \mapsto \{n \in \mathbb{N} \mid x_n = 1\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

は全単射である. したがって, この直積集合の濃度は $\aleph_1$ である.

問題 31 次の集合の濃度は $\aleph_1$ であることを示せ.

1. $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \mathcal{F}(\mathbb{N})$
2. 閉区間 $[0,1]$
3. $\mathbb{R}$
4. $\mathbb{C}$
5. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $X_n = \mathbb{R}$ としたときの直積集合 $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$

定義 1.12.6 濃度が有限または $\aleph_0$ の集合を**可算**またはたかだか可算であるといい, $\aleph_0$ の集合を**可算無限**であるという. 濃度が可算でない集合を**非可算**という. とくに, 濃度が $\aleph_1$ の集合を**連続濃度**, $\aleph_2$ の集合を**関数濃度**であるといい, それぞれ $\mathfrak{c}, \mathfrak{f}$ とも表す.

問題 32

1. $\mathbb{R}$ から $\{0,1\}$ への写像全体のなす集合の濃度は $\aleph_2$ であることを示せ.
2. $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像全体のなす集合の濃度は $\aleph_2$ であることを示せ.
3. 閉区間 $[0,1]$ 上の連続関数全体のなす集合 $C([0,1])$ の濃度は $\aleph_1$ であることを示せ.

1.13　関係 — 順序関係

==

キーワード 11 順序, 上限, 極大元, 全順序,

==

復習 8　1. 実数における上界, 下界, 上限, 下限

==

実数における通常の大小関係 $\leq$ の満たす性質のいくつかを, 一般の集合上でも考えてみる.

定義 1.13.1 集合 X において 3 条件

1. $\forall\, x \in X : x \prec x$
2. $\forall\, x, y \in X : ((x \prec y) \wedge (y \prec x)) \Rightarrow x = y$
3. $\forall\, x, y, z \in X : ((x \prec y) \wedge (y \prec z)) \Rightarrow x \prec z$

を満たす関係 $\prec$ を**順序**といい, この関係が与えられた集合 $(X, \prec)$ を**順序集合**という.

$\mathbb{R}$ において $\leq$ は順序関係を満たし, $(\mathbb{R}, \leq)$ は順序集合である.
また, $x \prec y$ のとき, y は x より大きいかまたは等しい, または x は y より小さいかまたは等しいということが多い.

問題 33 集合 X のべき集合 $\mathcal{P}(X)$ において, 集合の包含関係 $\subset$ を考えれば, $(\mathcal{P}(X), \subset)$ は順序集合であることを示せ.

順序集合 $(X, \prec)$ の空でない部分集合 A の元 x が任意の $y \in A$ に対して $y \prec x$ (または $x \prec y$) を満たすとき, それぞれ A の**最大元** (または**最小元**) といい, $\max A$ (または $\min A$) で表す.
順序集合 $(X, \prec)$ の空でない部分集合 A に対して,

$$\forall\, y \in A : y \prec x$$

を満たす $x \in X$ が存在するとき, それを A の**上界**という. さらに, A の上界全体の集合 $U(A)$ が最小元をもつとき, その元を A の**上限**といい, $\sup A$ で表す.

問題 34 順序集合 $(X, \prec)$ の部分集合 B に対して, 上界, 上限と同様にして**下界**, **下限** ($\inf B$ で表す) が定義できるので, その定義を考えて述べよ.

問題 35　1. 順序集合 $(\mathbb{R}, \leq)$ において, 次の 3 つの部分集合の上界, 上限, 下界, 下限が存在すれば, それらを求めよ.

$$\mathbb{N}, \qquad (0,1) \cup (2,3), \qquad (-\infty, 0)$$

2. 順序集合 $(X, \prec)$ の部分集合 A が最大元または最小元をもてば, もちろん, それは A の上限または下限でもあることを示せ.

また, A の元 x が

$$\forall\, y \in A : x \prec y \Rightarrow y = x \quad \text{または} \quad \forall\, y \in A : y \prec x \Rightarrow y = x$$

を満たすとき, それぞれ A の**極大元**または**極小元**という.

上の問題からもわかるように, 最大元, 最小元, 極大元, 極小元などは必ずしも存在しない.

問題 33 の 2 の例として, $X = \{a, b, c\}$ の場合を考える. この場合には

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, X\}$$

となる. 集合の包含関係による順序は次のように図示できる.

$$\begin{array}{ccccccc} & & \{a\} & \to & \{a,b\} & & \\ & \nearrow & & \nearrow & & \searrow & \\ \emptyset & \to & \{b\} & \to & \{b,c\} & \to & X \\ & \searrow & & \nearrow & & \nearrow & \\ & & \{c\} & \to & \{a,c\} & & \end{array}$$

線分で左から右へ辿って結ばれる 2 元は, 「左の元 $\subset$ 右の元」という順序関係にある. このとき, $\emptyset$ は最小元, X は最大元である. また, 部分集合族 $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ で同じ順序を考えると, 例えば $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$ などは極小元である.

定義 1.13.2 順序集合 $(X, \prec)$ において

$$\forall\, x \in X\ \forall\, y \in X : x \prec y \text{ または } y \prec x$$

が成り立つとき, この順序 $\prec$ を**全順序**, 順序集合を全順序集合という. この全順序と対比させて, 通常の順序を半順序ということもある.

問題 36 $X = \mathbb{R}^2$ において次の条件で与えられる関係 $(x, y) \prec (x', y')$ はそれぞれ順序関係であることを示せ.

1. $x \leq x'$ かつ $y \leq y'$

2. $x < x'$ または $(x = x'$ かつ $y \leq y')$

この問題の 2 は**辞書式順序**と呼ばれる全順序である. 辞書式順序という名前の由来は明らかであろう.

1.14　Zorn の補題 — 数学的帰納法の一般化

==

キーワード 12 Zorn の補題

==

復習 9　1. 順序, 全順序の定義

2. 選択公理

==

まえがきで Picaso の例え話をしたのと同じような具合に, 数学的帰納法を一般化した命題が Zorn の補題である．この補題は帰納法と同じように使い勝手がよく, 数学のさまざまな局面で存在証明として利用されている．身近なところでは, ベクトル空間における基底の存在, 非可測集合の存在, Hahn-Banach の定理の証明, 極大イデアルの存在など, どの証明にも Zorn の補題は欠かせない．第 2.6 節では集合 $X_i,\ i \in I$ の無限直積 $\prod_{i\in I} X_i$ を定義するために選択公理を仮定したが, 実はこれと Zorn の補題は同値 (つまり, 必要十分) である．これらの事実は, 20 世紀以降の数学が選択公理や Zorn の補題といった超限的な議論を元に組み立てられていることを示している．

公理 1.14.1 (Zorn の補題) 順序集合において, どんな全順序部分集合も上界をもつならば, その順序集合は極大元をもつ．

この補題の使い方は数学的帰納法と同じようにルーティン化しているので, その一端に触れるため, この補題を用いて選択公理を証明してみよう．

定理 1.14.2 選択公理が成り立つことと Zorn の補題が成り立つことは必要十分である．

証明　十分性．Zorn の補題が成り立つとする．各 X_i $(i \in I)$ を空でない集合とする．有限部分集合 $J \subset I$ に対しては各 X_j $(j \in J)$ から元 x_j を選んで組 $(x_j)_{j\in J}$ を作ることができる．J を有限集合に限らないでもこのような組は存在する可能性があるので, そのような組の全体を $\mathfrak{X}$ で表す．

$$\mathfrak{X} = \bigcup_{J\subset I} \{(x_j)_{j\in J} : (x_j)_{j\in J}\ \text{が存在}\ , x_j \in X_j, j \in J\}$$

この集合は空ではないし, 関係

$$(x_j)_{j\in J} \prec (y_k)_{k\in K} \Longleftrightarrow (J \subset K) \wedge (\forall\ j \in J : x_j = y_j)$$

により順序集合になる．その任意な全順序部分集合 $\mathfrak{Y}$ を $\{(x_j^\alpha)_{j\in J_\alpha} \mid \alpha \in A\}$ とする．ここで, $J = \bigcup_{\alpha\in A} J_\alpha$ とする．$j \in J$ ならば, $j \in J_\alpha$ を満たす $\alpha \in A$ があるので, 対応する組 $(x_j^\alpha)_{j\in J_\alpha}$ の元 $x_j^\alpha \in X_j$ を x_j とすれば, $x_j \in X_j$ となる．

この議論では, 添え字 α の選び方は必ずしも一意的ではないが, $\mathfrak{Y}$ が全順序部分集合であるから, x_j は α の選び方によらないで決まる. したがって, $\mathfrak{Y}$ が与えられると, 組 $(x_j)_{j\in J}$ が一意的に決まる. これが $\mathfrak{X}$ の元であり $\mathfrak{Y}$ の上界であることは明らかである. したがって, 順序集合 $(\mathfrak{X}, \prec)$ のどんな全順序部分集合も上界をもつ. Zorn の補題により, $\mathfrak{X}$ には極大元 $(z_\ell)_{\ell\in L}$ が存在する. もし添え字集合 L が I と一致していなければ, $I \setminus L$ の有限部分集合 $M \subset I$ に対して組 $(z_m)_{m\in M}$ $(z_m \in X_m)$ を選び, 組 $(z_\ell)_{\ell\in L\cup M}$ を作れば, 上の元 $(z_\ell)_{\ell\in L}$ の極大性と矛盾する. よって, $L = I$. ゆえに, $(z_i)_{i\in I}$ が存在する.

必要性. 次の補題 1.14.3 が必要になるが, 整列集合に関する準備を要するので, 証明は付録に譲り結果だけを仮定する. 順序集合 $(X, \prec)$ に極大元が存在しなければ,

$$\neg(\exists\ x \in X\ \forall\ y \in X : x \prec y \Rightarrow x = y)$$

ゆえに,

$$\forall\ x \in X\ \exists\ y \in X : (x \prec y) \wedge (x \neq y)$$

したがって, 各 $x \in X$ に対して $X_x = \{y \in X \mid (x \prec y) \wedge (x \neq y)\}$ とすれば, X_x は空ではない. 選択公理によれば, 各 X_x から一斉にその元を取り出すことができるので, それを $f(x)$ とおくことにより, X から自分自身への写像 f で, 任意の $x \in X$ に対して $x \prec f(x)$ かつ $x \neq f(x)$ を満たすものが存在する. これは次の補題と矛盾する. ■

補題 1.14.3 順序集合 $(X, \prec)$ において, どんな全順序部分集合も上界をもつならば, X から自分自身への写像 f に対して

$$(\forall\ x \in X : x \prec f(x)) \Rightarrow (\exists\ a \in X : f(a) = a)$$

1.15　付録–その１

===

キーワード 13 対角線論法, 整列集合

===

復習 10　1. 可算と連続

===

1.15.1　古典を尋ねて — Cantor の対角線論法

次の定理は Cantor が集合論の本質を見事に喝破し, 新たな理論の誕生を告げた記念碑的な主張である. この議論に感動した若人で数学を志した人は多い. 議論の単純さとその内容がもつ深淵さは論理のもつ気迫の一端を示している.

定理 1.15.1 (Cantor) $\mathbb{N}$ から $[0,1]$ への全単射は存在しない.

証明 (対角線論法) 背理法で証明する. そこで, $\mathbb{N}$ から $[0,1]$ への全単射 f が存在したとする. 各 $f(n) \in [0,1]$ を無限小数に展開したものを

$$f(n) = 0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}\cdots \qquad (a_{nk} \in \{0,1,2,\cdots,9\}\ (k \in \mathbb{N}))$$

とする. ただし, 有理数の中でも有限少数として表されるものは

$$0.a_{n1}a_{n2}\cdots(a_{ni}+1)000\cdots = 0.a_{n1}a_{n2}\cdots a_{ni}999\cdots$$

$(a_{ni} \in \{0,1,2,\cdots,8\})$ のように無限少数としても表せるので, 以下では, この右辺の表示を用いることにする. これにより, 各 $f(n)$ の展開は一意的に定まる. ここで,

$$b_i = \begin{cases} a_{ii}+1 & (a_{ii} \in \{0,1,\cdots,7\}) \\ 1 & (a_{ii} \in \{8,9\}) \end{cases}$$

とし,

$$b = 0.b_1b_2b_3\cdots$$

と置けば, $b \in [0,1]$ であるが, $b \notin \{f(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$. 実際, b と $f(n)$ は b_i の決め方により小数第 n 位が違っている. これは f が全射であることと矛盾している.
■

この結果は定理 1.11.2, 例題 1.12.5, 問題 29 からもわかる.

1.15.2　整列集合

定義 1.15.2 全順序集合 $(X, \prec)$ の空でない部分集合がどれも最小元をもつ ($\exists\, b \in A\ \forall\, a \in A : b \prec a$) とき，その全順序部分集合を**整列集合**という．このとき，各 $x \in X$ に対して定まる集合

$$\{y \in X \mid (y \prec x) \wedge (y \neq x)\}$$

を $\boldsymbol{x}$ **切片**または単に切片といい，$X(x)$ で表す．

例えば，自然数の全体 $\mathbb{N}$ は通常の順序 $\leq$ に関して整列集合である．

定理 1.15.3 (超限帰納法) 整列集合 $(X, \prec)$ の元 x に関する命題 $p(x)$ が

$$\forall\, x \in X : (\forall\, y \in X(x) : p(y)) \Rightarrow p(x)$$

を満たせば，$p(x)$ はすべての $x \in X$ に対して成り立つ．

証明　命題 $p(y)$ が真であるような $y \in X$ の集合を Y とする．もし差集合 $X \setminus Y$ が空でなければ最小元 x をもち，$X(x) \cap (X \setminus Y) = \emptyset$ となるので，$X(x) \subset Y$．ゆえに，仮定の条件により，$p(x)$ も真となり，$x \in Y$．これは x が $X \setminus Y$ の最小元であることと矛盾する．ゆえに，$Y = X$．よって $p(x)$ はすべての $x \in X$ に対して成り立つ．■

定義 1.15.4 ２つの順序集合 $(X, \prec)$，$(Y, \prec')$ に対して，X から Y への全単射 g で

$$\forall\, x_1, x_2 \in X : x_1 \prec x_2 \Longleftrightarrow g(x_1) \prec' g(x_2)$$

を満たすものが存在するとき，X と Y は**順序同型**であるといい，$X \sim Y$ と表す．また g を順序同型写像という．

問題 37 順序同型は同値関係であることを示せ．

補題 1.15.5 整列集合 $(X, \prec)$ に対して次のことが成り立つ．

1. $(X, \prec)$ から自分自身への順序同型写像は恒等写像である．
2. $x \in X$ ならば，X と $X(x)$ は順序同型ではない．
3. $X(x) \sim X(x')$ ならば，$x = x'$．

証明　1. 整列集合 $(X, \prec)$ から自分自身への順序同型写像を g とする．集合 $A = \{x \in X \mid \neg(x \prec g(x))\}$ が空でなければ最小元 a が存在する．$\neg(a \prec g(a))$ であるから，$\neg(g(a) \prec g(g(a)))$．ゆえに，$g(a) \in A$ となり，a が A の最小元であることと矛盾する．よって，$A = \emptyset$，つまり，すべての $x \in X$ に対して，$x \prec g(x)$．逆写像 g^{-1} に対しても同じ事がいえるから，$x \prec g^{-1}(x)$ つまり $g(x) \prec x$．ゆえに，g は恒等写像である．

2. 上の証明の前半では g が全射であることを使わずに $x \prec g(x)$ を導いている．したがって，もし X から $X(x)$ への順序同型写像 h が存在したとすれば，$x \prec h(x)$．これは $h(x) \in X(x)$ であることと矛盾するので，このような準同型 h は存在しない．

3. $x \prec x'$ と仮定できる．$x \neq x'$ ならば，$x \in X(x')$ であるから，$X(x) \neq X(x')$．
■

定理 1.15.6 (比較定理) 2 つの整列集合 X, Y に対して，次の 3 条件のいずれか 1 つが起こる．

1. $X \sim Y$
2. $\exists\, y \in Y : X \sim Y(y)$
3. $\exists\, x \in X : X(x) \sim Y$

証明 まず，3 条件のうち 2 つが同時に起こることはないことを示す．補題 1.15.5 により，条件 1 と 3 は同時に成り立つことはない．同様に，条件 1 と 2 も同時に成り立つことはない．条件 2 と 3 が同時に成り立ったとすると，$Y(y)$ は $X(x)$ のある z 切片 $(X(x))(z) = X(z)$ と順序同型になる．したがって，X が $X(z)$ と順序同型になり，補題 1.15.5 と矛盾する．

残りの部分で，実際に 3 条件が起こることを 2 つの場合に分けて示す．

(a) $\forall\, x \in X\ \exists\, y \in Y : X(x) \sim Y(y)$ の場合．

補題 1.15.5 により，各 $x \in X$ に対して，$X(x) \sim Y(y)$ を満たす $y \in Y$ が一意的に決まるので，この対応を $g : x \to y$ とおく．いま $x \prec x'$ かつ $x \neq x'$ とする．$X(x)$ は $X(x')$ の切片であるから，再び補題 1.15.5 により，$X(x')$ から $Y(g(x'))$ への順序同型写像による $X(x)$ の像は $Y(g(x'))$ の切片であり $Y(g(x))$ と一致する．ゆえに，$g(x) \prec g(x')$ かつ $g(x) \neq g(x')$．よって，g は順序を保存する単射である．

任意の $y \in g(X)$ に対して $Y(y) \subset g(X)$ となる．実際，$g(x) = y$ を満たす $x \in X$ が存在するので，$X(x) \sim Y(y)$．$y' \in Y(y)$ とすれば，$Y(y')$ は $Y(y)$ の切片であるから，$X(x)$ から $Y(y)$ への順序同型写像による $Y(y')$ の逆像は $X(x)$ の切片である．したがって，この逆像は $x' \in X$ を用いて $X(x')$ と表せる．このとき，$X(x') \sim Y(y')$ であるから，$y' = g(x') \in g(X)$．

$g(X) \neq Y$ のときには，$y \in Y \setminus g(X)$ は $g(X)$ の上界である．実際，もし y が上界でなければ，$\neg(g(x) \prec y)$ を満たす $x \in X$ が存在する．このとき $y \in Y(g(x))$ となるので，上の結果により，$y \in g(X)$ となり矛盾する．したがって，$g(X) = Y$ であるか，または，整列集合では上界をもてば上限が存在するので，それを $z \in Y$ とすれば，$g(X) \sim Y(z)$．

(b) $\exists\, x \in X\ \forall\, y \in Y : \neg(X(x) \sim Y(y))$ の場合．

この場合の条件を満たす x 全体のなす集合を A とし，その最小元を a とする．この場合には，$X(a) \sim Y$ となることを示す．$x \in X(a)$ ならば，$(X(a))(x) = X(x)$．また $x \notin A$ であるから，$X(x) \sim Y(y)$ となる $y \in Y$ が一意的に存在する．したがって，(a) の議論により，$X(a)$ は Y またはその切片と順序同型に

なる．しかし，この場合に $X(a)$ が Y の切片と順序同型になることはないので，$X(a)$ は Y と順序同型である．■

これで補題 1.14.3 を少し強い仮定の下で示すことができる．

補題 1.15.7 順序集合 $(X, \prec)$ において，どんな全順序部分集合も上限をもつならば，X から自分自身への写像 f に対して

$$\forall\, x \in X : x \prec f(x) \Rightarrow \exists\, a \in X : f(a) = a$$

証明 順序集合 $(X, \prec)$ の元 $a \in X$ を選ぶ．X の全順序部分集合 A で次の条件

1. A は最小元 a をもつ整列集合である．
2. A の元 x が A における直前の元 $y \in A$ をもてば，$f(y) = x$
3. A の a と異なる元 x が A における直前の元をもたなければ，$A(x)$ の X における上限は x

を満たすものを考え，このような集合のなす集合族を $\mathfrak{A}$ とする．$\{a\} \in \mathfrak{A}$ であるから，$\mathfrak{A}$ は空ではない．つぎに，集合族 $\mathfrak{A}$ は集合の包含関係から導かれる順序に関して全順序集合であることを示す．$A,\ B \in \mathfrak{A}$ とすれば，比較定理 1.15.6 により，$A \sim B$ あるいは $A,\ B$ のいずれかが一方が他方の切片と一致する．いま，これらの間の順序同型，例えば A と切片 $B(b)$ の間の順序同型写像を g とする．g は最小元を保存するので，$g(a) = a$．つぎに，$x \neq a$ に対して，

$$\forall\, y \in A : (y \prec x) \wedge (y \neq x) \Rightarrow g(y) = y$$

とする．x が A において直前の元 y をもてば，$x = g(y) = y$ であるから，$g(x) = g(y) = x$．また，x が A において直前の元をもたなければ，x は $A(x)$ の X における上限であるから，$g(x)$ は $g(A(x))$ の上限である．ところが，$g(A(x)) = A(x)$ であるから，$g(x) = x$ となる．したがって，定理 1.15.3 の超限帰納法を使うと，g は A 上では恒等写像である．したがって，$A \subset B(b)$，つまり $A \subset B$．他の組み合わせも同様に証明できるので，$\mathfrak{A}$ は全順序集合である．ここで，

$$C = \bigcup_{A \in \mathfrak{A}} A$$

とすれば，$C \in \mathfrak{A}$．C は全順序部分集合であるから，仮定により，上限 $c \in X$ をもつ．このとき，$C \cup \{c\}$ はまた $\mathfrak{A}$ の元であるから，$c \in C$．他方，$c \prec f(c)$ である．もし $c \neq f(c)$ ならば，$C \cup \{f(c)\}$ もまた $\mathfrak{A}$ の元であるから，$f(c) \in C$ となり，c が C の上限であることと矛盾する．ゆえに，$f(c) = c$．■

これで次の少し強い仮定の下での Zorn の補題が示された．

定理 1.15.8 順序集合において，どんな全順序部分集合も上限をもつならば，その順序集合は極大元をもつ．

定理 1.15.9 (Hausdorff の極大原理) 順序集合のすべての全順序部分集合のなす集合族を $\mathfrak{X}$ とする．集合の包含関係に関する順序集合 $(\mathfrak{X}, \subset)$ において，

$$\forall\ A \in \mathfrak{X}\ \exists\ B \in \mathfrak{X} : B \text{ は } \mathfrak{X}_A \text{ において極大}$$

ただし，$\mathfrak{X}_A = \{B \in \mathfrak{X} \mid A \subset B\}$.

証明　部分集合族 $\mathfrak{Y}$ を順序集合 $(\mathfrak{X}_A, \subset)$ の全順序部分集合とする．ここで，

$$C = \bigcup_{B \in \mathfrak{Y}} B$$

とすれば，$C \in \mathfrak{X}_A$ となるので，C は $\mathfrak{Y}$ の上限である．ゆえに，定理 1.15.8 により，$(\mathfrak{X}_A, \subset)$ は極大元をもつ．■

これでいよいよ Zorn 補題 1.14.3 を証明をすることができる．

証明　順序集合 $(X, \prec)$ のすべての全順序部分集合のなす集合族を $\mathfrak{X}$ とし，$A \in \mathfrak{X}$ とする．定理 1.15.9 により，順序集合 $(\mathfrak{X}_A, \subset)$ には極大元 B が存在する．Zorn の補題の仮定により，B は X に上界 b をもつ．このとき，$B \cup \{b\}$ は $(\mathfrak{X}_A, \subset)$ の元であるから，その極大性により，$b \in B$．この元 b が X における極大元であることを示す．もし b が極大でなければ，$b \prec x$ かつ $x \neq b$ を満たす元 $x \in X$ が存在する．このとき，$B \cup \{x\}$ は $(\mathfrak{X}_A, \subset)$ の元であるから，B の極大性により，$x \in B$．ゆえに $x \prec b$ となり矛盾する．■

1.15.3　Cantor の３進集合についての補足

閉区間 $I = [0, 1]$ の部分集合

$$C = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \mid a_n \in \{0, 2\} \right\}$$

を Cantor 集合という．ここで，無限級数の値

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \quad (a_n \in \{0, 1, 2\})$$

を 3 進小数を用いて $0.a_1a_2a_3\cdots$ で表せば，

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &= 0.0222\cdots \in C \\ \frac{2}{3} &= 0.1222\cdots = 0.2 \in C \\ 1 &= 0.2222\cdots \in C. \end{aligned}$$

さらに

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n} \mid a_1=0\right\}=\left[0,\frac{1}{3}\right]$$
$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n} \mid a_1=1\right\}=\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$$
$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n} \mid a_1=2\right\}=\left[\frac{2}{3},1\right].$$

となるので,

$$I\setminus\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)=\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n} \mid a_1=0\vee a_1=2\right\}.$$

ここで, この集合を J_1 とし,

$$J_2=\frac{1}{3}J_1\cup\left(\frac{1}{3}J_1+\frac{2}{3}\right)$$

とおけば,

$$\frac{1}{3}J_1=\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n} \mid a_1=0\wedge(a_2=0\vee a_2=2)\right\}$$
$$\frac{1}{3}J_1+\frac{2}{3}=\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n} \mid a_1=2\wedge(a_2=0\vee a_2=2)\right\}$$

となるので,

$$J_2=\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n} \mid a_1,a_2\in\{0,2\}\right\}.$$

以下, 帰納的に

$$J_{n+1}=\frac{1}{3}J_n\cup\left(\frac{1}{3}J_n+\frac{2}{3}\right)\quad(n=2,3,4,\cdots)$$

と定めれば,

$$J_n=\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n} \mid a_1,\cdots,a_n\in\{0,2\}\right\}$$

となることがわかる. したがって,

$$C=\bigcap_{n=1}^{\infty}J_n$$

と表せる.

自然数 $\mathbb{Z}$ から 2 進整数への次のような自然な対応を β とする.

$$\beta(1)=1,\ \beta(2)=10,\ \beta(3)=11,\ \beta(4)=100,\ \beta(5)=101,\ \cdots$$

このとき, m 桁の 2 進整数 $\beta(\sum_{j=1}^{m}c_j2^{m-j})=c_1\cdots c_m$ に対して, 2 進整数から 3 進整数への対応を $\gamma(\sum_{j=1}^{m}c_j2^{m-j})=\sum_{j=1}^{m}c_j3^{m-j}$ とすれば,

$$I\setminus J_n=\bigcup_{k=1}^{2^{n-1}}\left(\frac{2\gamma(2k-1)-1}{3^n},\frac{2\gamma(2k-1)}{3^n}\right)$$

と表せるで,

$$I \setminus C = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} \left(\frac{2\gamma(2k-1)-1}{3^n}, \frac{2\gamma(2k-1)}{3^n} \right)$$

となる. このとき, 右辺の開区間の長さの和は

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = 1$$

であるから, Cantor 集合 C は I のごくわずかな部分しか占めていない. 例題 1.8.5 の Cantor 集合 C 上の関数 f を, $I \setminus C$ 上でも

$$f(x) = \frac{2k-1}{2^n} \quad \left(x \in \left(\frac{2\gamma(2k-1)-1}{3^n}, \frac{2\gamma(2k-1)}{3^n} \right) \right)$$

とおいて I 上へ拡張して得られる関数を Cantor 関数という. これは I から自分自身の上への単調増加な関数であるが, I の大部分を占める $I \setminus C$ における導関数は 0 である.

1.16 補充問題

第１．１節

第１．２節

第１．３節

1. 次のことを示せ.

   a. $(\forall\ x : p(x)) \wedge q \Longleftrightarrow \forall\ x : p(x) \wedge q$

   b. $(\exists\ x : p(x)) \vee q \Longleftrightarrow \exists\ x : p(x) \vee q$

2.

3.

4.

5.

第１．４節

第１．５節

第１．６節

第１．７節

第１．８節

第１．９節

1. 写像 $f : X \to Y$ に対して, f が単射であるための必要十分条件は X の任意の部分集合 $A,\ B$ に対して, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ が成り立つことである.

2.

3.

4.

5.

第１．１０節

実数の構成 有理数の数列 $\{a_n\}$ が "$n, m \to \infty \Rightarrow |a_n - a_m| \to 0$" を満たすとき Cauchy 列という. このような列全体のなす集合を $\mathscr{C}$ とする. $\{a_n\}, \{b_n\} \in \mathscr{C}$ に対して, $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$ のとき, $\{a_n\} \sim \{b_n\}$ とすれば, $\sim$ は同値関係である. (このとき, 同値類の集合 $\mathscr{C}/\sim$ は実数の集合 $\mathbb{R}$ と同一視される.)

1.

2.

3.

第１．１１節

1. 次の手順で Bernstein の定理を証明せよ. X から Y への単射を f, Y から X への単射を g とする. ともに全射ではない場合だけを考えればよい. したがって,

$$Y_1 = Y \setminus f(X), \quad X_1 = X \setminus g(Y)$$

とすれば, これらはともに空ではない. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$X_{2n} = (g \circ f)^{n-1} \circ g(Y_1), \quad X_{2n+1} = (g \circ f)^n (X_1)$$

$$Y_{2n} = (f \circ g)^{n-1} \circ f(X_1), \quad Y_{2n+1} = (f \circ g)^n (Y_1)$$

とおく. X_i どうし, Y_j どうしは互いに共通部分をもたない. さらに,

$$X_\infty = X \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i, \quad Y_\infty = Y \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} Y_j$$

とおけば, X, Y は互いに共通部分をもたない集合の和集合 $(\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i) \cup X_\infty$, $(\bigcup_{j=1}^{\infty} Y_j) \cup Y_\infty$ として表せる. ここで, X から Y への写像 F を

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & (x \in X_{2n-1} \text{ または } x \in X_\infty) \\ g^{-1}(x) & (x \in X_{2n}) \end{cases}$$

と定義すれば (g^{-1} は g を全単射 $Y \to g(Y)$ と見たときの逆写像),

$$F(X_{2n-1}) = f(X_{2n-1}) = Y_{2n}, \quad F(X_{2n}) = g^{-1}(X_{2n}) = Y_{2n-1}$$

を満たすので, F を $\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ へ制限したものは $\bigcup_{j=1}^{\infty} Y_j$ への全単射である. f は単射でありしかも $f(X_{2n}) = f \circ (g \circ f)^{n-1} \circ g(Y_1) = Y_{2n+1}$ を満たすので, 定理 1.9.2 により,

$$\begin{aligned} F(X_\infty) = f(X_\infty) &= f(X) \setminus f\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i\right) \\ &= f(X) \setminus \bigcup_{j=2}^{\infty} Y_j = (Y \setminus Y_1) \setminus \bigcup_{j=2}^{\infty} Y_j = Y_\infty \end{aligned}$$

よって, F は X から Y への全単射である.

問題 38　a. 上の証明で集合 X_i どうし, Y_j どうしが共通部分をもたないことを示せ.

b. 上の証明で写像 F が全単射であることを示せ.

2.

3.

第１．１２節

第１．１３節

第１．１４節

1.17 試験問題

集合・位相 I 中間試験 (平成 15 年 5 月 19 日)

1. 真理表を用いて次の 3 つの命題が同値であることを示せ. (20)

$$\neg(a \wedge b) \quad と \quad (\neg a) \vee (\neg b) \quad と \quad a \Rightarrow \neg b$$

2. つぎの述語が同値であることを示せ. (30)

   a. $\neg(\forall\, x : p(x))$ と $\exists\, x : \neg p(x)$

   b. $\neg(\exists\, x : q(x))$ と $\forall\, x : \neg q(x)$

3. N, W をそれぞれ日本女子大学, 早稲田大学の学生の集合とし, 「x は y の先輩である」という文章を $p(x,y)$ とする. このとき, 次の述語を通常の文章で述べよ. (20)

   a. $\exists\, x \in N\ \forall\, y \in W : p(x,y)$

   b. $\forall\, y \in W\ \exists\, x \in N : p(x,y)$

4. 次の等式を示せ. (30)

   a. $(\bigcap_{i\in I} A_i)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c$

   b. $(\bigcup_{i\in I} B_i)^c = \bigcap_{i\in I} B_i^c$

集合・位相 I 期末試験 (平成 15 年 7 月 21 日)

1. $\mathbb{R}$ における関数 $f(x) = x^2$ に対して次の像と逆像を求めよ. (20)

$$f([1,2]), \quad f^{-1}((-1,1))$$

2. 写像 $f : X \to Y$ と X の部分集合 A, B に対して,

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$

   となることを示せ. さらに, この包含関係が等号にならない写像の例を与え, その理由を述べよ. (20)

3. 次の集合の濃度は $\aleph_0$ であることを示せ. (30)

$$\mathbb{Z}, \quad \mathbb{N}^2, \quad \mathbb{Q}$$

4. 次の集合の濃度は $\aleph_0$ ではないことを示せ. (20)

$$[0,1]$$

5. 集合 $X = \mathbb{R}^2$ において, 関係 $(x, y) \prec (x', y')$ を $x \leq x'$ かつ $y \leq y'$ で定める. このとき,

   a. $(X, \prec)$ は順序集合であることを示せ. (10)

   b. 部分集合 $(0, 1]^2$ の最大元, 最小元, 上限, 下限が存在するかどうか理由を述べ, 存在する場合にはその元を求めよ. (20)

集合 · 位相 I 期末試験 (平成 16 年 7 月 26 日)

1. 数列 $\{a_n\}$ が a に収束することを

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

   で定義する. このとき,

   a. $\{a_n\}$ が a に収束しないことを, 定義のように論理式を使って述べよ. (20)

   b. $\{a_n\}$ が a に収束しなければ, ある $\varepsilon > 0$ と $\{a_n\}$ の部分列 $\{a_{n_k}\}_k$ が存在して,

$$\forall\, k \in \mathbb{N} : |a_{n_k} - a| \geq \varepsilon$$

   となることを示せ. (20)

2. 集合 $A = \{a, b, c\}$ のべき集合 $\mathcal{P}(A)$ を求めよ. (10)

3. 写像 $f : X \to Y$ と $g : Y \to Z$ の合成写像 $g \circ f : X \to Z$ に対して, 次のことを示せ.

   a. $g \circ f$ が全射ならば, g は全射である. (10)

   b. $g \circ f$ が単射ならば, f は単射である. (10)

4. 次の 2 つの集合の間の全単射を作れ.

   a. $\mathbb{N}$ と $\mathbb{N}^2$. (10)

   b. $\mathbb{N}$ と $\mathbb{Z}$. (10)

   c. $\mathbb{N}$ と $\mathbb{Z}^2$. (10)

5. 自然数の集合 $\mathbb{N}$ から閉区間 $[0, 1]$ への全単射は存在しないことを示せ. (30)

6. 集合 $X = \mathbb{N}^2$ において, 関係 $(x, y) \prec (x', y')$ を $x \leq x'$ かつ $y \leq y'$ で定める. このとき, $(X, \prec)$ は順序集合であることを示せ. (10)

集合 · 位相 I 期末試験解答例

1. 数列 $\{a_n\}$ が a に収束することを

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

で定義する. このとき,

a. $\{a_n\}$ が a に収束しないことを, 定義のように論理式を使って述べよ.
解.

$$\exists\, \varepsilon > 0\ \forall\, n_0 \in \mathbb{N}\ \exists\, n \in \mathbb{N} : (n \geq n_0) \wedge (|a_n - a| \geq \varepsilon)$$

注意. **否定記号と限定記号を交換すると, 全称記号と存在記号が入れ替わる. また, 命題** $p \Rightarrow q$ **は命題** $(\neg p) \vee q$ **と同値であった. したがって, これらの否定命題は** $p \wedge (\neg q)$ **と同値である.**

b. $\{a_n\}$ が a に収束しなければ, ある $\varepsilon > 0$ と $\{a_n\}$ の部分列 $\{a_{n_k}\}_k$ が存在して,

$$\forall\, k \in \mathbb{N} : |a_{n_k} - a| \geq \varepsilon$$

となることを示せ.

解. n_0 **を任意に定める. (a) により, この** n_0 **に対して,** $(n_1 \geq n_0) \wedge (|a_{n_1} - a| \geq \varepsilon)$ **を満たす** n_1 **が存在する. 再度 (a) により,** n_1 **に対して,** $(n_2 \geq n_1) \wedge (|a_{n_2} - a| \geq \varepsilon)$ **を満たす** n_2 **が存在する. 以下, 同様な議論を繰り返すことにより,** $\{a_n\}$ **の部分列** $\{a_{n_k}\}_k$ **で**

$$\forall\, k \in \mathbb{N} : |a_{n_k} - a| \geq \varepsilon$$

を満たすものが得られる.

2. 集合 $A = \{a, b, c\}$ のべき集合 $\mathcal{P}(A)$ を求めよ.

解. 第 1.6 節に書いてある.

3. 写像 $f : X \to Y$ と $g : Y \to Z$ の合成写像 $g \circ f : X \to Z$ に対して, 次のことを示せ.

a. $g \circ f$ が全射ならば, g は全射である.

解. $z \in Z$ **とする.** $g \circ f$ **が全射であるから,** $g(f(x)) = z$ **を満たす** $x \in X$ **が存在する.** $y = f(x)$ **とすれば,** $\exists\, y \in Y : g(y) = z$ **となり,** g **は全射である.**

b. $g \circ f$ が単射ならば, f は単射である.

解. X **の元** x, y **に対して,** $x \neq y$ **ならば,** $g \circ f$ **が単射であるから,** $g(f(x)) \neq g(f(y))$ **となる. したがって,** $f(x) \neq f(y)$ **となり,** f **は単射である.**

4. 次の 2 つの集合の間の全単射を作れ.

a. $\mathbb{N}$ と $\mathbb{N}^2$.

解．例題 1.12.3 による．

b. $\mathbb{N}$ と $\mathbb{Z}$.

解． $\mathbb{N}$ **から** $\mathbb{Z}$ **への写像を**

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & (n : \textbf{偶数}) \\ -(n-1)/2 & (n : \textbf{奇数}) \end{cases}$$

とする．まず， f **が全射であることを確かめるために，** $z \in \mathbb{Z}$ **とする．** z **が正の整数の場合には，** $n = 2z$ **とすれば，** n **は偶数になるから，** $f(n) = n/2 = z$ **となる．** $z \in \mathbb{Z}$ **が 0 または負の整数の場合には，** $n = 1 - 2z$ **とすれば，** n **は奇数であるから，** $f(n) = -(n-1)/2 = -(1-2z-1)/2 = z$ **となり，** f **は全射である．**

つぎに， f **が単射であることを確かめために，** $n, m \in \mathbb{N}$ **に対して** $n \neq m$ **とする．** n, m **のいずれかが 1 のときは明らかであるから，** n, m **がともに 1 でない場合を考える．** n, m **が偶数と奇数の場合には，** $f(n), f(m)$ **の符号が違うので，** $f(n) \neq f(m)$ **となる．** n, m **がともに偶数かまたは奇数の場合は，それぞれ** $n/2 \neq m/2$ **または** $-(n-1)/2 \neq -(m-1)/2$ **となるので，やはり** $f(n) \neq f(m)$ **となる．よって，** f **は単射である．**

c. $\mathbb{N}$ と $\mathbb{Z}^2$.

解．(a) により，全単射 $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ **が存在する．(b) により，全単射** $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ **が存在する．ここで，** $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ **に対して**

$$F(n, m) = (f(n), f(m))$$

とすれば，写像 F **は** $\mathbb{N}^2$ **から** $\mathbb{Z}^2$ **への全単射である．したがって，合成写像** $F \circ g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}^2$ **も全単射である．**

5. 自然数の集合 $\mathbb{N}$ から閉区間 $[0, 1]$ への全単射は存在しないことを示せ.

解．定理 1.15.1 を復習せよ．

6. 集合 $X = \mathbb{N}^2$ において, 関係 $(x, y) \prec (x', y')$ を $x \leq x'$ かつ $y \leq y'$ で定める. このとき, $(X, \prec)$ は順序集合であることを示せ.

解．関係 $\prec$ **が順序の定義条件を満たすことを確認する．**

a. $x \leq x$ **かつ** $y \leq y$ **であるから，** $(x, y) \prec (x, y)$ **となり反射性が成り立つ．**

b. $(x, y) \prec (x', y')$ **かつ** $(x', y') \prec (x, y)$ **ならば，(**$x \leq x'$ **かつ** $y \leq y'$**) かつ (**$x' \leq x$ **かつ** $y' \leq y$**) が成り立つので，** $x = x'$ **かつ** $y = y'$ **となる．よって，** $(x, y) = (x', y')$ **となり反対称性が成り立つ．**

c. $(x, y) \prec (x', y')$ **かつ** $(x', y') \prec (x'', y'')$ **ならば，(**$x \leq x'$ **かつ** $y \leq y'$**) かつ (**$x' \leq x''$ **かつ** $y' \leq y''$**) が成り立つので，** $x \leq x''$ **かつ** $y \leq y''$ **となる．よって，** $(x, y) \prec (x'', y'')$ **となり，推移性が成り立つ．**

以上により, $(X, \prec)$ は順序集合である.

集合・位相 Ia 中間試験 (平成 17 年 5 月 16 日)

1. 次の 2 つの命題が同値であることを示せ. (30)

$$(a \Rightarrow b) \Rightarrow c \quad と \quad (a \vee c) \wedge (b \Rightarrow c)$$

2. $\neg(\forall\ x\ :\ p(x))$ と $\exists\ x\ :\ \neg p(x)$ が同値であることと, $\neg(\exists\ x\ :\ q(x))$ と $\forall\ x : \neg q(x)$ が同値であることを用いて, つぎの述語の同値性を示せ. (20)
   a. $\neg(\forall\ x \in A : p(x))$ と $\exists\ x \in A : \neg p(x)$
   b. $\neg(\exists\ x \in A : q(x))$ と $\forall\ x \in A : \neg q(x)$

3. $\mathbb{R}$ 上の実数値関数 f が点 x において連続であることを

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall\ y \in \mathbb{R} : |y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon$$

で定義する. この定義を否定した述語を, 論理記号を用いて表し, それを言葉で述べなさい. (20)

4. 次の等式を示せ. (30)
   a. $(\bigcap_{i\in I} A_i)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c$
   b. $(\bigcup_{i\in I} B_i)^c = \bigcap_{i\in I} B_i^c$

集合・位相 I 期末試験 (平成 17 年 7 月 25 日)

1. 写像 $f : X \to Y$ が全単射であるための必要十分条件は合成写像 $g \circ f$ および $f \circ g$ がそれぞれ X, Y 上の恒等写像となるような写像 $g : Y \to X$ が存在することであることを示せ. (30)

2. 写像 $f : X \to Y$ と X の部分集合 A_1, A_2 に対して,

$$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$$

を示せ. 等号が成り立たない例をあげよ. (30)

3. 整数の集合 $\mathbb{Z}$ の濃度は $\aleph_0$ であることを示せ. (20)

4. 自然数の集合 $\mathbb{N}$ と閉区間 $[0, 1]$ の間には全単射は存在しないことを, Cantor の対角線論法を使って証明せよ. (40)

集合・位相 I 中間試験 (平成 18 年 5 月 15 日)

1. 次の 2 つの命題が同値であることを示せ. (10)

$$a \Rightarrow (b \Rightarrow c) \quad と \quad (a \wedge b) \Rightarrow c$$

2. つぎの 2 つの命題が同値であることを示せ. (20)

a. $(\exists\, x : p(x)) \vee q$ と $\exists\, x : p(x) \vee q$

b. $(\forall\, x : p(x)) \Rightarrow q$ と $\exists\, x : p(x) \Rightarrow q$

3. a. 命題

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow p(n)$$

の否定命題を論理記号を用いて表せ. (10)

b. (a) が成り立たないときには,

$$\exists\, \{n_k\}_k \subset \mathbb{N} : (n_1 < n_2 < \cdots) \wedge \neg\, p(n_k)$$

を示せ. (20)

4. 次の 4 つの関係式は同値であることを示せ. (40)

a. $A \subset B$

b. $A \cap B^c = \emptyset$

c. $A^c \cup B = X$

d. $B^c \subset A^c$

集合 · 位相 I 期末試験 (平成 19 年 7 月 23 日)

1. 次の 2 つの命題が同値であることを示せ. (20)

$$a \Rightarrow (b \Rightarrow c) \quad と \quad (a \wedge b) \Rightarrow c$$

2. 次の 2 つの関係式は同値であることを示せ. (20)

a. $A \subset B$

b. $A \cap B^c = \emptyset$

3. 空でない集合 X から空でない集合 Y への写像 f に対して, 次の式が成り立つ場合にはその証明を、成り立たない場合にはその反例を示せ. (20)

a. X の部分集合 A_1, A_2 に対して $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$

b. Y の部分集合 B_1, B_2 に対して $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

4. a. 集合 $\mathbb{N}^2$ の濃度を求めよ. (10)

b. 開区間 $(0, 1)$ と閉区間 $[0, 1]$ は同じ濃度をもつことを示せ. (10)

5. Cantor の対角線論法を用いて, 自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ から閉区間 $[0, 1]$ への全単射は存在しないことを示せ. (40)

集合 · 位相 I 中間試験 (平成 20 年 5 月 26 日)

1. 次の 2 つの命題は同値であることを示せ. (20)

$$a \Rightarrow (b \Rightarrow c) \quad と \quad (a \wedge b) \Rightarrow c$$

2. 次の関係が成り立つことを示せ. (40)

   a. $\neg(\forall\ x : p(x)) \Longleftrightarrow \exists\ x : \neg p(x)$

   b. $\neg(\exists\ x : p(x)) \Longleftrightarrow \forall\ x : \neg p(x)$

3. 次の式を示せ. (40)

   a. $B \ominus C = (B \cup C) \setminus (B \cap C)$

   b. $A \setminus (B \ominus C) = (A \setminus (B \cup C)) \cup (A \cap B \cap C)$

   c. $(B \setminus C) \setminus A = B \setminus (A \cup C)$

   d. $(B \ominus C) \setminus A = (B \setminus (A \cup C)) \cup (C \setminus (A \cup B))$

第2章　位相空間(前半)

2.1　位相の意味

位相空間論は連続性と関連して現れる基本的な事実およびその取り扱いを, 最も一般的な観点から体系的にまとめた理論である. この連続という用語は自然現象が時間と共に変化して行く過程の記述や, 粘土の塊を少しずつ変形しながらコーヒーカップに仕上げて行く過程を記述するときなどに使われる. これら変化の様子は数学ではいずれも写像という用語を用いて記述することができ, 連続性はその写像のもつ性質の１つと考えられる.

高校では, $\mathbb{R}$ 上の関数 f が点 $x = a$ において連続であることを, 「a と異なる変数 x が限りなく a へ近づけば, $f(x)$ は限りなく $f(a)$ へ近づくこと」と定義している. つまり,

$$x \to a \Rightarrow f(x) \to f(a)$$

このように, 連続性は $x = a$ という１点で決まる概念ではなく, a の周りとの関連で決まる概念である. このことは a の近くの点は関数 f により $f(a)$ の近くの点に写像されることを意味していて, 幾何学的な描像とも一致する.

大学の微積分に現れる連続性は, いわゆる ε-δ 論法を用いて, 次のように簡潔に定義されている.

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0\ \forall\,x : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

多変数の場合の連続性も, 点 x が点 a へ近づくという意味などの説明が必要になるが, 高校の場合と同様に点の収束列 (正確には有向系) を用いて定義をすることができる. １変数の関数の連続性だけであれば, この定義で十分であるが, 多変数になり, 議論が込み入ってくると, ε-δ 論法を用いる方が, 誤りが少なく使い勝手がよいことが経験的にわかっている. この事実は ε-δ 論法が非常の優れた論法であることを裏付けている.

教育の現場で経験することであるが, ε-δ 論法は連続性を検証するために生み出された数学固有の言語であって, 日頃使われていないために, 慣れるのにかなりの時間を要する. その点位相空間では, 集合 X の部分集合族 $\mathscr{T}$ で次の３条件

$$\emptyset,\ X \in \mathscr{T}$$
$$U,\ V \in \mathscr{T} \Rightarrow U \cap V \in \mathscr{T}$$
$$\mathcal{U} \subset \mathscr{T} \Rightarrow \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \in \mathscr{T}$$

を満たす「位相」というものを X 上に与え, これを道具に議論を始める. Y 上にも位相 $\mathscr{T}_Y$ が与えられているときには, X から Y への写像 f の連続性は

$$\forall\, U : U \in \mathscr{T}_Y \Rightarrow f^{-1}(U) \in \mathscr{T}$$

と至って簡単に定義される. 位相の元は開集合と呼ばれ, 写像が連続ということは開集合の逆像が開集合ということになる. このように, いったん, 位相というものを受け入れてしまいさえすれば, ε-δ 論法のお世話にならなくても, もっと気楽にしかももっと一般な状況の連続性までが議論できるようになる.

そこで, つぎに, いったい位相とは何かということを, 高校での連続性の定義を念頭に, それと関連させながら考えてみよう. X の任意の部分集合 A に対して A の元で「近似できる点の全体」を $\overline{A}$ で表し, これを A の閉包と呼ぶことにしよう. ここで, 近似できるという意味は余り深く考えずに話を先に進める. f が連続のときには, 高校のときの定義を思い起こせば, a が A の元で近似できるならば, $f(a)$ も $f(A)$ の元で近似できるということであったから, f の連続性は,

$$\forall\, A \subset X : f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$$

と表すことができる. したがって, 関数の連続性の定義性は, 近似の仕方, つまり集合 A の閉包をどのように決めるかにかかっている. 閉包に関しては次のことが容易にわかる.

1. 空集合には元がないから空集合で近似できる元は存在しない.
2. A の元は A の元で近似できている.
3. A の閉包で近似できる元は A でも近似できる.
4. $A \cup B$ で近似できる元は A または B のいずれかで近似できる.

これら 4 つを式で表すと次のようになる.

$$\overline{\emptyset} = \emptyset, \quad A \subset \overline{A}, \quad \overline{\overline{A}} = \overline{A}, \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B} \tag{2.1}$$

このとき, $\overline{A} = A$ を満たす集合を閉集合という. 閉集合全体のなす集合族 $\mathscr{F} = \{A : \overline{A} = A\}$ を用いて,

$$\mathscr{T} = \{U \mid U^c \in \mathscr{F}\}$$

としたものが位相である. この議論は逆に辿ることもできる. つまり, 位相 $\mathscr{T}$ から閉集合族 $\mathscr{F} = \{F : F^c \in \mathscr{T}\}$ を作り, 任意の A に対して, これを含む最小の閉集合を $\overline{A}$ とすれば, 最初の対応 $A \to \overline{A}$ を復元することができる. したがって, 高校のときの関数の連続性は位相を使って言い換えることができ, しかも位相の方が連続性の取り扱いが簡単になっていることがわかる. 以上の相互関係をまとめると

$$\text{対応 } A \to \overline{A} \Longleftrightarrow \text{閉集合族 } \mathscr{F} \Longleftrightarrow \text{位相 (開集合族) } \mathscr{T}$$

つまり, X への位相の与え方は, 各集合 A にその元で近似できる点全体の集合を決めることと同値な内容になっている. したがって, 位相は高校のときの連続

の定義をもっと一般的に捉え直し, しかも取り扱いを単純化したものといってよく, 現時点では, 連続性の本質を記述する最も扱いやすい概念である.

最初の第 2.1.1 節と第 2.1.2 節は微積分の教科書で解説されている事実の復習のために用意されている. その冒頭で実数の公理的定式化を述べたが, このような取り扱いは, 非ユークリッド幾何のモデルの研究に触発されて, 1860 年頃から始められ (自然数に関する Peano の公理が出たのは 1889 年である), 現在では実数の標準的な定式化として広く受け入れられている. このような取り扱いは, 初心者に親しみにくいだけでなく, 授業で十分に時間を掛けて勉強しなかった人も多いであろうが, 現代の微積分はこれらの事柄を基に順序だって構築された理論であるから, まだ不慣れな人は急いで教科書をていねいに復習しておいて欲しい. 講義はこれらの事柄をモデルにして予告通り第 2.2 節から始める.

かってプラトン (Plato) のアカデメイアの入り口には

「幾何学を知らざる者, この門に入るべからず」

と書かれていたそうだが, この頃の幾何学は Euclid の「幾何学原論」に見られるように, 公理、公準を元に論理的に組み立てられていた。その後, この美しい議論の進め方は, R.Descartes に代表して見られるように, ヨーロッパ思想の根幹を支え続けている. 他方, 2000 年を越える歳月を経て, 18 世紀の後半になると数学の新たな近代的な取り扱いが芽生え, その流れの延長線上で 19 世紀後半になると, Hilbert 達により, 改めて Plato 帰りの機運が高まり, 実数はその中心的な役割を果たし, この講義で述べるような定式化が確立した事実を思い起こし, 現代の若者には

「実数を知らざる者, 解析学の門に入るべからず」

という言葉を贈りたい. そして, このように, 実数一つとっても学問には文化と伝統が欠かせないことを知っていてほしい. かって, ナポレオンがエジプト遠征をした兵士に向かって「諸君、五千年の歴史が諸君を見ている」と言ったそうであるが, Euclid はかってアレキサンドリアの図書館長であったことなどを想いながら, 数学を学ぶことの意義を噛みしめてほしい.

2.1.1　実数の定義

==

キーワード 14 実数, 上限, 下限

==

定義 2.1.1 実数 $\mathbb{R}$ という集合は次の 4 条件で定義される.

1. 四則演算 (加減乗除) が成り立つ
2. 四則演算と両立する大小関係 $\leq$ が与えられている
3. (Archimedes の公理) $\forall\, x > 0\ \forall\, y \geq 0\ \exists\, n \in \mathbb{N} : y \leq nx$
4. 閉区間の減少列 $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の共通部分 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ は空ではない.

この条件 1 により, この集合は有理数全体 $\mathbb{Q}$ を含むことがわかる. 条件 $1, 2, 3$ を使うと, 次の補題により, どの実数も有理数列で近似できることがわかる. 条件 4 は Cantor の性質といわれ, 実数が極限演算の下で閉じていることを保証している.

補題 2.1.2 任意の実数 x, y $(x < y)$ に対して, $(x, y) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$.

証明　$y - x$ と 2 に対して Archimedes の公理を適用すると, $1 < 2 \leq n(y - x)$ を満たす自然数 n が存在する. ゆえに, $n^{-1} < y - x$. $y > 0$ の場合には n^{-1} と y に同じ公理を適用すると, $y \leq k/n$ を満たす自然数 k が存在する. この不等式を満たす k のうち最小の自然数を h とすれば,

$$\frac{h-1}{n} < y \leq \frac{h}{n}$$

ゆえに, $(h-1)/n \in (x, y) \cap \mathbb{Q}$. $y \leq 0$ の場合には, $(-y, -x)$ に対して上の結果を適用すれば, $(-y, -x) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$. ゆえに, $(x, y) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$. ■

定義 2.1.3 $\mathbb{R}$ の部分集合 A に対して,

1. $\exists\, b \in \mathbb{R}\ \forall\, a \in A : a \leq b$ が成り立つとき, A は**上に有界**であるといい, b を A の**上界**という.
2. $\exists\, b \in \mathbb{R}\ \forall\, a \in A : a \geq b$ が成り立つとき, A は**下に有界**であるといい, b を A の**下界**という.
3. A が上にも下にも有界のとき, A は**有界**であるという.

集合 A が上に有界のとき, その上界全体からなる集合は

$$\{b \in \mathbb{R} \mid \forall\, a \in A : a \leq b\} = \bigcap_{a\in A} [a, \infty)$$

と表せる．この集合を U とする．閉区間 $I_1 = [a_1, b_1]$ を $A \cap I_1 \neq \emptyset$ かつ $b_1 \in U$ を満たすように選び, a_1, b_1 の中点を c_1 とする．長さが半分の閉区間 $I_2 = [a_2, b_2]$ を

$$I_2 = \begin{cases} [a_1, c_1] & (A \cap [c_1, b_1] = \emptyset \text{ のとき}) \\ [c_1, b_1] & (A \cap [c_1, b_1] \neq \emptyset \text{ のとき}) \end{cases}$$

により定める． この決め方により, $A \cap I_2 \neq \emptyset$ かつ $b_2 \in U$ となる．以下この議論を繰り返して, 閉区間の減少列 $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を得る．Cantor の性質により, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{c\}$ となる c が存在する．したがって, 列 $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は単調減少しながら c へ収束する U の列である．各 $a \in A$ に対して, $a \leq b_n$ が成り立つので, $a \leq c$. よって, $c \in U$ となり, U には最小値 c が存在することがわかる．同様なことが下に有界な集合に対してもいえる．

この証明のように, 与えられた区間の二等分を繰り返して, Cantor の性質 (区間縮小法) を用いる証明法を二分法という．

命題 2.1.4 上に有界な集合には最小な上界が存在する．下に有界な集合には最大な下界が存在する．

定義 2.1.5 集合 A の最小の上界または最大の下界をそれぞれ, A の**上限**または**下限**といい, sup A, inf A で表す．

問題 39 上限または下限が存在する $\mathbb{R}$ の部分集合 A, B に対して次のことを示せ．

1. $a = \sup A$ であることは次の 2 条件が成り立つことと同値である．

$$\text{(a)}\ \forall\ x \in A : x \leq a, \quad \text{(b)}\ \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ x \in A : a - \varepsilon < x.$$

   $b = \inf B$ に対しても同様な条件を求めよ．

2. $A \subset B \Rightarrow \sup A \leq \sup B$ かつ $\inf A \geq \inf B$
3. $\sup(-A) = -\inf A$. ただし, $-A = \{-a \mid a \in A\}$

集合 A が上に有界であるからといって, A に最大元があるとは限らないが上限なら必ず存在する．同様なことが下に有界な集合に対してもいえる．したがって, これらの用語を用いて集合が存在する範囲 (限界) を記述することができる．

上に有界あるいは下に有界な数列 $\{x_n\}$ に対して

$$y_n = \sup\{x_k \mid k \geq n\}, \quad z_n = \inf\{x_k \mid k \geq n\}$$

とする．これら単調な数列 $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ がまたそれぞれ下あるいは上に有界なときには, それらは下限または上限をもつ．これをそれぞれ数列 $\{x_n\}$ の**上極限**, **下極限**といい, $\overline{\lim}\, x_n$, $\underline{\lim}\, x_n$ で表す．したがって, 数列が有界ならば, いつでも上極限と下極限が存在する．

2.1.2　実数空間における連続性

==

キーワード 15 数列の収束, 関数の連続性,

==

復習 11　1. 実数空間の定義

2. 上界, 下界の定義

3. 上限, 下限の定義

==

定義 2.1.6　1. 数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が

$$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,n_0\in\mathbb{N}\ \forall\,n,m\in\mathbb{N}: n,m\geq n_0 \Rightarrow |x_n-x_m|<\varepsilon$$

を満たすとき Cauchy **列**という.

2. 数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が

$$\exists\,x\in\mathbb{R}\ \forall\,\varepsilon>0\ \exists\,n_0\in\mathbb{N}\ \forall\,n\in\mathbb{N}: n\geq n_0 \Rightarrow |x_n-x|<\varepsilon$$

を満たすとき, $\{x_n\}$ を**収束列**, x をその**極限**という. このとき, $\{x_n\}$ は x へ**収束する**ともいい, これを $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ または $x_n\to x$ で表す.

問題 40　1. 実数のなす Cauchy 列は必ず極限をもつことを示せ.

2. 上に有界な単調増加数列はその上限へ収束することを示せ. 同様なことを, 下に有界な単調減少数列に対しても示せ.

3. 上に有界または下に有界な数列 $\{x_n\}$ に対して次式を示せ.

$$\overline{\lim}\,x_n = \lim_{n\to\infty}\sup\{x_k \mid k\geq n\},\quad \underline{\lim}\,x_n = \lim_{n\to\infty}\inf\{x_k \mid k\geq n\}$$

4. 有界な数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が収束するための必要十分条件はその上極限と下極限が一致することであることを示せ.

問題 41　1. $\log 2 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\cdots$ を示せ.

2. 並べ替えた級数 $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\cdots$ の値を求めよ.

定義 2.1.7　1. 実数空間上の関数 f が $x\in\mathbb{R}$ において

$$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0\ \forall\,y\in\mathbb{R}: |y-x|<\delta \Rightarrow |f(y)-f(x)|<\varepsilon$$

を満たすとき, f は $\boldsymbol{x}$ **において連続**であるという.

2. f がすべての $x \in \mathbb{R}$ において連続のとき, f は $\mathbb{R}$ において**連続**であるという.

以下の議論で, $\mathbb{R}$ の部分集合 A 上で定義された関数の連続性は, 上の定義で $\mathbb{R}$ の部分を A に置き換えればよい.

定理 2.1.8 $\mathbb{R}$ 上の関数 f に対して, 次の 2 条件は同値である.

1. f は x において連続である.
2. $\forall \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$

証明 $1 \Rightarrow 2$. $x_n \to x$ ならば,

$$\forall\, \delta > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x| < \delta$$

したがって, 条件 1 により,

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow |f(x_n) - f(x)| < \varepsilon$$

$2 \Rightarrow 1$. 背理法を用いる. もし f が x において連続でないとすれば,

$$\exists\, \varepsilon > 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, x_n : |x_n - x| < \frac{1}{n}\ \text{かつ}\ |f(x_n) - f(x)| \geq \varepsilon$$

これは条件 2 と矛盾する. ■

問題 42 次のことを示せ.

1. $\mathbb{R}$ 上の実数値関数 f, g が連続ならば, これらの和, 定数倍, 積

$$f + g, \quad af, \quad fg$$

   も連続である. ただし, $a \in \mathbb{R}$.

2. $\mathbb{R}$ 上の多項式 $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ は連続関数である.
3. f, g を $\mathbb{R}$ の開区間 U 上の連続関数とする. 各 $x \in U$ において $f(x) \neq 0$ ならば, 商 g/f も U 上の連続関数である.

問題 43 例 1.8.5 において得られた Cantor 集合 C から閉区間 $[0,1]$ への全射を $[0,1] \setminus C$ では定数値にして, その値はその点を含み $[0,1] \setminus C$ に含まれる最大開区間の両端点の値として

$$f\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}} \quad (a_n = 0,\ 2)$$

と定めることにより, 区間 $[0,1]$ から自分自身への写像 f が得られる. この写像は連続であり Cantor 関数と呼ばれている.

2.2　位相空間の定義

==

キーワード 16　位相空間, 開集合, 閉集合

==

一般の集合 X においても写像の連続性を議論するために, 位相という構造を与える.

X の部分集合からなる集合族 $\mathscr{T}$ で次の 3 条件をみたすものを**位相**という.

1. $\emptyset,\ X \in \mathscr{T}$
2. $\forall\, U\ \forall\, V : U,\ V \in \mathscr{T} \Rightarrow U \cap V \in \mathscr{T}$
3. $\forall\, \mathscr{C} : \mathscr{C} \subset \mathscr{T} \Rightarrow \bigcup_{U \in \mathscr{C}} U \in \mathscr{T}$

定義 2.2.1
1. 集合 X にこのような位相が与えられたとき, X を**位相空間**といい, $(X, \mathscr{T})$ で表す.
2. X の部分集合 U が $\mathscr{T}$ の元であるとき, U を**開集合**という. また, X の部分集合 F の補集合が $\mathscr{T}$ の元であるとき, F を**閉集合**という.

例題 2.2.2
1. 集合 X に対して $\mathscr{T} = \{\emptyset, X\}$ とすれば, $(X\mathscr{T})$ は位相空間である. この場合の開集合は空集合と全空間の 2 つしかない. 閉集合も空集合と全空間の 2 つしかない. これら以外の X の部分集合は開集合でも閉集合でもない. これでは X で位相を考える意味がない. そこでこのような位相空間を**自明な位相空間**と呼ぶ.
2. 集合 X のすべての部分集合からなる集合族は X のべき集合と呼ばれ $\mathcal{P}(X)$ と表されていた. このとき, $(X, \mathcal{P}(X))$ は位相空間になる. この場合は X のすべての部分集合が開集合でも閉集合でもあり, わざわざ位相を考える意味はないのであるが, 位相空間の特別な場合として含めておいた方が都合の良いことが多い. そこでこのような位相空間を**離散空間**という.
3. $\mathbb{R}$ において,

$$\mathscr{T} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mid A^c \text{ は有限集合 }\} \cup \{\emptyset\}$$

とすれば, $(\mathbb{R}, \mathscr{T})$ は位相空間である.

自然数の集合 $\mathbb{N}$, 格子点全体の集合 $\mathbb{Z}^2$ などで位相を扱うときには, とくに断らない限り, 離散位相を考える. つまり各点のなす集合が開かつ閉な集合になっている.

問題 44　例題 2.2.2 の 3 が位相空間になることを示せ.

例題 2.2.3 $X=\{1,2,3\}$ において,

$$\mathscr{T}=\{\emptyset,\{1\},\{2,3\},X\}$$

とする．このとき, $(X,\mathscr{T})$ は位相空間になる．実際, $\emptyset,\ X\in\mathscr{T}$ は明らかであるから, $\mathscr{T}$ は条件 1 を満たす．条件 2 は次の表 2.1 から明らかである．条件 3 は

$U \ \backslash \ V$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2,3\}$	X
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{1\}$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\emptyset$	$\{1\}$
$\{2,3\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{2,3\}$	$\{2,3\}$
X	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2,3\}$	X

表 2.1: $U\cap V\in\mathscr{T}$

表 2.2 の結果を繰り返し利用して示すことができる．

$U \ \backslash \ V$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2,3\}$	X
$\emptyset$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2,3\}$	X
$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	X	X
$\{2,3\}$	$\{2,3\}$	X	$\{2,3\}$	X
X	X	X	X	X

表 2.2: $U\cup V\in\mathscr{T}$

問題 45 $(X,\mathscr{T})$ を位相空間とし, A をその空でない部分集合とする．このとき, $\mathscr{T}_A=\{U\cap A\mid U\in\mathscr{T}\}$ とすれば, $(A,\mathscr{T}_A)$ は位相空間になることを示せ．

この問題で得られた位相 $\mathscr{T}_A$ を $\mathscr{T}$ から A 上へ導かれた**相対位相**という．

問題 46 位相空間 $(X,\mathscr{T})$ における閉集合の全体 $\{F\mid F^c\in\mathscr{T}\}$ を $\mathscr{F}$ とする．このとき,

1. $\emptyset,\ X\in\mathscr{F}$
2. $F_1,\ F_2\in\mathscr{F}\Rightarrow F_1\cup F_2\in\mathscr{F}$
3. $F_i\in\mathscr{F},\ i\in I\Rightarrow\bigcap_{i\in I}F_i\in\mathscr{F}$

が成り立つことを示せ．

2.3　位相の基

==

キーワード 17 基

==

復習 12　1. 位相空間の定義

2. 開集合, 閉集合の定義

==

位相を用いる議論では, 位相の元すべてを具体的に記述することはできなくても, これから述べる基の元であれば具体的に記述できることが多い. むしろ, 基を指定して, それを元に位相の定義をするのが一般的である. そのため, 位相を取り扱うときに基の果たす黒子的な役割は非常に大切である.

$(X, \mathscr{T})$ を位相空間とする.

定義 2.3.1 $\mathscr{T}$ の部分集合族 $\mathscr{B}$ が

$$\forall\, U \in \mathscr{T}\ \exists\, \mathscr{C} : (\mathscr{C} \subset \mathscr{B}) \wedge \left(U = \bigcup_{V \in \mathscr{C}} V\right)$$

を満たすとき, $\mathscr{B}$ を位相 $\mathscr{T}$ の**基**という. このとき, $\mathscr{T}$ は $\mathscr{B}$ により生成される位相という.

定理 2.3.2 X の部分集合のなす集合族 $\mathscr{B}$ がある位相の基であるための必要十分条件は

1. $X = \bigcup_{U \in \mathscr{B}} U$
2. 任意の $U,\ V \in \mathscr{B}$ に対して

$$U \cap V \neq \emptyset \Rightarrow (\forall\, x \in U \cap V\ \exists\, W \in \mathscr{B} : (x \in W) \wedge (W \subset U \cap V))$$

が成り立つことである. このとき, $\mathscr{B}$ を基にもつ位相は一意的に定まる.

証明　必要性：$\mathscr{B}$ がある位相 $\mathscr{T}$ の基ならば, $X \in \mathscr{T}$ であるから, 上の条件 1 が成り立つ. $U,\ V \in \mathscr{B}$ ならば, $U \cap V = \bigcup_{W \in \mathscr{C}} W$ を満たす $\mathscr{C} \subset \mathscr{B}$ が存在するから, 各 $x \in U \cap V$ に対して上の条件 2 も成り立つ.

十分性：次の集合族を $\mathscr{T}$ とし, これが X における位相であることを示す.

$$\left\{ \bigcup_{U \in \mathscr{C}} U \mid \mathscr{C} \subset \mathscr{B} \right\} \quad ただし \bigcup_{U \in \emptyset} U = \emptyset\ とする$$

$\emptyset \in \mathscr{T}$ は明らかである. 上の条件 1 より $X \in \mathscr{T}$. よって位相の条件 1 が成り立つ. 各 $U_i \in \mathscr{T}$ $(i \in I)$ に対して, $U_i = \bigcup_{U_i' \in \mathscr{C}_i} U_i'$ を満たす $\mathscr{B}$ の部分集合族 $\mathscr{C}_i$

が存在する．ここで，$\mathscr{C} = \bigcup_{i \in I} \mathscr{C}_i$ とすれば，$\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{U \in \mathscr{C}} U$ と表せるので，位相の条件 3 が成り立つ．位相の条件 2 を示すために，まず $U,\ V \in \mathscr{B}$ の場合を考える．上の条件 2 により，任意の $x \in U \cap V$ に対して $x \in W_x \subset U \cap V$ を満たす $\mathscr{B}$ の元 W_x が存在する．ゆえに，

$$U \cap V = \bigcup_{x \in U \cap V} \{x\} \subset \bigcup_{x \in U \cap V} W_x \subset U \cap V$$

ゆえに，$U \cap V \in \mathscr{T}$．つぎに，一般の $U,\ V \in \mathscr{T}$ の場合を考える．$U,\ V$ を表す $\mathscr{B}$ の部分集合族を $\mathscr{U},\ \mathscr{V}$ とする．このとき，

$$U \cap V = \left(\bigcup_{U' \in \mathscr{U}} U' \right) \cap \left(\bigcup_{V' \in \mathscr{V}} V' \right) = \bigcup_{U' \in \mathscr{U},\ V' \in \mathscr{V}} (U' \cap V')$$

$U' \cap V' \in \mathscr{T}$ であったから，上で示した位相の条件 3 により $U \cap V$ は $\mathscr{T}$ の元であることがわかる．よって，位相の条件 2 も示され，$\mathscr{T}$ は X 上の位相である．$\mathscr{B}$ が位相 $\mathscr{T}$ の基であることは明らかである．■

問題 47 実数の集合 $\mathbb{R}$ において，集合族 $\{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$ はある位相の基であることを示せ．

例題 2.3.3 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ において，

$$\mathscr{T} = \{\emptyset, \{1\}, \{4\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, X\}$$

としたとき，$(X, \mathscr{T})$ が位相空間になることを例題 2.2.3 と同じようにして，直接証明することは大変である．しかし，$\mathscr{B} = \{\emptyset, \{1\}, \{4\}, \{2, 3\}\}$ がある位相の基であること確かめ，$\mathscr{B}$ が $\mathscr{T}$ を生成していることに注意すれば，$(X, \mathscr{T})$ は位相空間であることがわかる．

命題 2.3.4 集合 X の 2 つの部分集合族 $\mathscr{B},\ \mathscr{B}'$ がそれぞれ位相 $\mathscr{T},\ \mathscr{T}'$ の基であるとする．$\mathscr{T} = \mathscr{T}'$ であるための必要十分条件は次の 2 条件が成り立つことである．

1. $\forall\, U \in \mathscr{B} : (\forall\, x \in U\ \exists\, V \in \mathscr{B}' : (x \in V) \wedge (V \subset U))$
2. $\forall\, V \in \mathscr{B}' : (\forall\, y \in V\ \exists\, U \in \mathscr{B} : (y \in U) \wedge (U \subset V))$

証明　必要性は明らかである．十分性を示す．条件 1 により，各 $U \in \mathscr{B}$ は

$$U = \bigcup_{x \in U} \left(\bigcup_{V \in \mathscr{B}',\ x \in V \subset U} V \right) \in \mathscr{T}'$$

と表せるので，$\mathscr{T} \subset \mathscr{T}'$．条件 2 により，逆の包含関係 $\mathscr{T}' \subset \mathscr{T}$ が得られる．■

2.4　ℝ における通常の位相

==

キーワード 18 ℝ **における通常の位相**

==

復習 13　1. 位相空間の定義

2. 開集合, 閉集合の定義

3. 基

==

実数の集合 ℝ において, 有界な開区間全体のなす集合族

$$\mathscr{B} = \{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$$

は定理 2.3.2 の条件を満たすので, ある位相の基である. 定理 2.3.2 の証明からわかるように, この位相は集合族

$$\left\{ \bigcup_{U \in \mathscr{C}} U \mid \mathscr{C} \subset \mathscr{B} \right\} \quad \text{ただし} \quad \bigcup_{U \in \emptyset} U = \emptyset \text{ とする}$$

により与えられる. この位相は高校で学んだ収束の概念を厳密に論ずるときに使われる位相で, 位相空間論の雛形になっている.

定義 2.4.1 実数の集合 ℝ において, 有界な開区間全体のなす集合族 $\mathscr{B}$ の定める位相を**通常の位相** あるいは**自然な位相**という.

問題 48 ℝ の通常の位相に関して次のことを示せ.

1. 区間 $(-\infty, a)$, (b, ∞) は開集合である.
2. 区間 $(-\infty, a]$, $[b, \infty)$ は閉集合である.
3. 区間 $[a, b]$ は閉集合であるが, 開集合ではない.
4. n 点集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ は閉集合である.
5. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ は開集合である.
6. 収束列 $a_n = 1/n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とその極限 0 のなす集合 $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ は閉集合である.
7. 例 1.8.5 の Cantor 集合は閉集合である.

命題 2.4.2 ℝ の通常の位相に関する空でない開集合は互いに共通部分をもたない可算個の開区間の和集合として表せる.

証明　U を開集合とする．U は有界な開区間の和集合で表されるから，U の各元 $x \in U$ に対して，それを含む有界開区間 (a,b) で U に含まれるものがある．明らかに，$(a,x) \subset (a,b) \subset U$, $(x,b) \subset U$ となる．ここで

$$a_x = \inf\{a \in U \mid (a,x) \subset U\}, \quad b_x = \sup\{b \in U \mid (x,b) \subset U\}$$

とする．これら下限または上限が存在しないときは，a_x, b_x をそれぞれ $-\infty$, $+\infty$ とする．

$$(a_x, x) = \bigcup_{(a,x)\subset U} (a,x) \ (\subset U) \tag{2.2}$$

かつ $a_x \notin U$ が成り立つ．実際，$a_x \in U$ とすると，U に含まれる開区間で a_x を元にもつものが存在し，a_x の決め方と矛盾する．同様に，$(x,b_x) \subset U$ かつ $b_x \notin U$ が成り立つ．ゆえに $(a_x,b_x) \subset U$．よって U は $\bigcup_{x\in U}(a_x,b_x)$ と表せる．いま $y \in U$ とすれば，$(a_x,b_x) = (a_y,b_y)$ または $(a_x,b_x) \cap (a_y,b_y) = \emptyset$ のいずれかが成り立つ．上の和集合で重複しているものを省くと，U は互いに共通部分をもたない開区間の和集合として $\bigcup_{i\in I}(a_i,b_i)$ と表せる．選択公理と補題 2.1.2 を用いて，各開区間 (a_i,b_i) から有理数を 1 つ選んで r_i とすれば，集合 $\{r_i \mid i \in I\}$ はたかだか可算であるから，添え字の集合 I もたかだか可算である．■

問題 49　1. 等式 (2.2) を示せ．

2. 上の証明で $x, y \in U$ に対して $(a_x,b_x) = (a_y,b_y)$ または $(a_x,b_x) \cap (a_y,b_y) = \emptyset$ となることを示せ．

問題 50 $\mathbb{R}$ の通常の位相に関して，$a < b$ を満たす a,b により定まる区間 $(a,b]$, $[a,b)$ はいずれも開集合でも，閉集合でもないことを示せ．

問題 51　1. 実数空間 $\mathbb{R}$ において，集合族 $\{[a,b) \mid a,b \in \mathbb{R},\ a < b\}$ はある位相 $\mathscr{T}'$ の基であることを示せ．

2. 開区間 (a,b) は $\mathscr{T}'$ の元であることを示せ．

この問題により，実数の集合における通常の位相は問題 51 の位相 $\mathscr{T}'$ に含まれれるが，逆の包含関係は成り立たないことがわかる．

2.5　$\mathbb{R}^2$ における通常の位相

==

キーワード 19 直積位相, $\mathbb{R}^2$ **における通常の位相**

==

復習 14　1. 開集合, 閉集合の定義

2. 位相の基

3. $\mathbb{R}$ における通常の位相

==

例題 2.5.1 2 つの位相空間 $(X_1, \mathscr{T}_1)$, $(X_2, \mathscr{T}_2)$ の基をそれぞれ $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_2$ とする. このとき, 直積集合 $X_1 \times X_2$ の部分集合族

$$\{U \times V \mid (U \in \mathscr{B}_1) \wedge (V \in \mathscr{B}_2)\}$$

は $X_1 \times X_2$ におけるある位相の基である. 実際, $X_1 = \bigcup_{U \in \mathscr{B}_1} U$, $X_2 = \bigcup_{V \in \mathscr{B}_2} V$ であるから,

$$X_1 \times X_2 = \bigcup_{U \in \mathscr{B}_1,\ V \in \mathscr{B}_2} U \times V$$

また $U_i \times V_i \in \mathscr{B}_1 \times \mathscr{B}_2$, $(i = 1, 2)$ に対して, $(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) \neq \emptyset$ ならば, この共通部分に含まれる任意の元 (x, y) に対して, $x \in U_1 \cap U_2$ かつ $y \in V_1 \cap V_2$ が成り立つ. したがって, 基の条件により, $x \in U_3 \subset U_1 \cap U_2$ と $y \in V_3 \subset V_1 \cap V_2$ を満たす $U_3 \in \mathscr{B}_1$ と $V_3 \in \mathscr{B}_2$ が存在する. よって,

$$(x, y) \in U_3 \times V_3 \quad \text{かつ} \quad U_3 \times V_3 \subset (U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2)$$

を満たす $\mathscr{B}_1 \times \mathscr{B}_2$ の元 $U_3 \times V_3$ が存在する. ゆえに, 定理 2.3.2 により, $\mathscr{B}_1 \times \mathscr{B}_2$ はある位相の基である.

定義 2.5.2 この例により, $X_1 \times X_2$ 上に定まる位相を位相空間 $(X_1, \mathscr{T}_1)$, $(X_2, \mathscr{T}_2)$ の**直積位相**という.

例題 2.5.3 $\mathbb{R}^2$ において, 2 点 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$ の間の (ユークリッドの) 距離

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

を $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ で表し, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ に中心とする半径 $\varepsilon > 0$ の開円板

$$\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2 \mid d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) < \varepsilon\}$$

を $U_\varepsilon(\boldsymbol{x})$ で表す. このとき, 集合族 $\{U_\varepsilon(\boldsymbol{x}) \mid (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2) \wedge (\varepsilon > 0)\}$ はある位相の基である. 実際, $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2, \varepsilon > 0} U_\varepsilon(\boldsymbol{x})$ は明らかである. つぎに $U_\varepsilon(\boldsymbol{x})$ と $U_{\varepsilon'}(\boldsymbol{y})$

の共通部分が空でない場合にはその任意な元を $\boldsymbol{z}$ とする．ここで，2 点 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の間の (ユークリッドの) 距離を $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ で表す．$\varepsilon'' = \min\{\varepsilon - d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}), \varepsilon' - d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})\}$ とすれば，$U_{\varepsilon''}(\boldsymbol{z})$ はその共通部分に含まれる．よって，最初の集合族はある位相の基である．

定義 2.5.4 この例で $\mathbb{R}^2$ 上に定まる位相を $\mathbb{R}^2$ における**通常の位相**という．

問題 52 直積集合 $\mathbb{R}^2$ において $\mathbb{R}$ の通常の位相の直積位相を考える．このとき，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ を中心とする半径 ε の開円板は開集合であることを示せ．

命題 2.5.5 $\mathbb{R}^2$ における通常の位相は $\mathbb{R}$ における通常の位相の直積位相と一致する．

証明 $\mathbb{R}$ の有界開区間全体のなす集合族を $\mathscr{B}$ とする．$\boldsymbol{y} \in U_\varepsilon(\boldsymbol{x})$ ならば，点 $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$ を元にもつ開区間の直積集合 $U \times V \in \mathscr{B} \times \mathscr{B}$ で $U_\varepsilon(\boldsymbol{x})$ に含まれるものが存在する．実際，$\delta = (\varepsilon - d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}))/2$ を用いて，$U = (y_1 - \delta, y_1 + \delta)$，$V = (y_2 - \delta, y_2 + \delta)$ とすればよい．

また，$U \times V \in \mathscr{B} \times \mathscr{B}$ とする．任意の $\boldsymbol{x} \in U \times V$ に対して $U_\varepsilon(\boldsymbol{x}) \subset U \times V$ を満たす $\varepsilon > 0$ が存在する．実際，点 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ と開区間 $U = (a, b)$，$V = (c, d)$ に対して $\varepsilon = \min\{x_1 - a, b - x_1, x_2 - c, d - x_2\}$ とすれば，$U_\varepsilon(\boldsymbol{x}) \subset U \times V$ となる．

よって，命題 2.3.4 により，$\mathbb{R}^2$ の通常の位相と直積位相は一致する．■

$\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ における通常の位相も同様に考える．複素平面での位相はそれを $\mathbb{R}^2$ と同一視し，通常の位相を用いて考える．

問題 53 つぎの集合は $\mathbb{R}^2$ の通常の位相に関して閉集合であることを示せ．

1. 線分 $\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1\}$
2. 半平面 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$
3. 正方形 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x|, |y|\} \leq 1\}$
4. 閉円板 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$
5. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1,\ 0 \leq x^2 \leq y\}$
6. 円のグラフ $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$

問題 54 つぎの集合は $\mathbb{R}^2$ の通常の位相に関して開集合であることを示せ．

1. 閉円板の補集合 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\}$
2. 開菱形 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| < 1\}$
3. 開正方形 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x|, |y|\} < 1\}$
4. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1,\ 0 < x^2 < y\}$

2.6　集合の内部と閉包

==

キーワード 20 内部, 閉包, 稠密性

==

復習 15

1. 位相空間の定義
2. 開集合と閉集合の定義
3. $\mathbb{R}$ の通常の位相

==

ここでは集合の閉包という概念を導入する．章の冒頭にも述べたように, 集合の閉包は, 与えられた位相に関して, その集合の点で近似できる点全体の集合であり, 位相空間論の出発点となった概念である．ここでは, 集合の閉包と双対な, 集合の内部という文字通りの概念も導入する．

$(X, \mathscr{T})$ を位相空間とする．

定義 2.6.1 X の部分集合 A に対して,

1. A に含まれる最大の開集合を A の**内部**といい, A° で表す．
2. B を含む最小の閉集合を B の**閉包**といい, $\overline{B}$ で表す．

ただし, 大小は集合の包含関係で考える．このとき, A° の元を A の内点, $\overline{B}$ の元を B の触点という．

この定義から明らかなように $A^\circ \subset A$ かつ $B \subset \overline{B}$ はいつでも成り立っている．

問題 55 例題 2.3.3 の位相空間で

1. 集合 $\{1, 2\}$ の内部と閉包を求めよ．
2. 集合 $\{1, 2, 4\}$ の内部と閉包を求めよ．

問題 56

1. どんな集合 A も内部をもつことを示せ．
2. どんな集合 B も閉包が存在することを示せ．

問題 57 $\mathbb{R}$ において通常の位相を考える．そのとき, 区間

$$(a, b), \quad (a, b], \quad [a, b), \quad [a, b]$$

の閉包はどれも閉区間 $[a, b]$ であり, 内部はどれも開区間 (a, b) であることを示せ．

問題 58 次のことを示せ．

1. A が開集合であるための必要十分条件は $A = A^\circ$
2. B が閉集合であるための必要十分条件は $B = \overline{B}$
3. $(A^\circ)^\circ = A^\circ$
4. $\overline{(\overline{B})} = \overline{B}$
5. $(A^\circ)^c = \overline{A^c}$. ヒント : 内部の定義を考えよ.
6. $(\overline{B})^c = (B^c)^\circ$. ヒント : 閉包の定義を考えよ.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "補集合"] \arrow[d, "内部"'] & A^c \arrow[d, "閉包"] \\
A^\circ \arrow[r, "補集合"'] & (A^\circ)^c = \overline{A^c}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "補集合"] \arrow[d, "閉包"'] & B^c \arrow[d, "内部"] \\
\overline{B} \arrow[r, "補集合"'] & (\overline{B})^c = (B^c)^\circ
\end{tikzcd}
$$

問題 59 次の式を示せ.

1. $A \subset B \Rightarrow A^\circ \subset B^\circ$
2. $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$
3. $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$
4. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

例題 2.6.2 $\mathbb{R}$ で通常の位相を考える. このとき, $A = (0, 1)$, $B = (1, 2)$ とすれば, $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$. また, $A = [0, 1]$, $B = [1, 2]$ とすれば, $(A \cup B)^\circ \neq A^\circ \cup B^\circ$.

注 1 集合族 $\mathcal{P}(X)$ に条件 (2.1) を満たす写像 $A \in \mathcal{P}(X) \mapsto \overline{A} \in \mathcal{P}(X)$ を与え, このとき $A = \overline{A}$ を満たす集合を閉集合と定義して, X における位相の議論を始めることもある.

定義 2.6.3 集合 A, B に対して, $A \subset \overline{A \cap B}$ が成り立つとき, B は A において**稠密**であるという.

問題 60

1. $\mathbb{R}$ の通常の位相に関して, 有理数の全体 $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ において稠密であることを示せ.
2. 問題 44 の位相空間において, 有限でない集合はどれも X において稠密であることを示せ.
3. θ を無理数とする. このとき, 単位円 $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ の部分集合 $\{(\cos(2n\pi\theta), \sin(2n\pi\theta)) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ は, $\mathbb{R}^2$ の通常の位相に関して, S^1 において稠密である理由を述べよ.

2.7　近傍系

==

キーワード 21　近傍, 近傍系, 基本近傍系,

==

復習 16　1. 位相空間の定義

2. 開集合と閉集合の定義

3. 集合の閉包と内部の定義

==

ここでは, 位相空間の局所的なに捉え方として広く使われている, 近傍系の概念を導入しよう. 実際に位相を取り扱うときには, この形で論じられることが多い.

$(X, \mathscr{T})$ を位相空間とする.

定義 2.7.1　点 $x \in X$ に対して,

$$x \in U^\circ$$

を満たす X の部分集合 U を x の**近傍**という. また, このような近傍全体のなす集合族を x の**近傍系**といい, $\mathscr{U}(x)$ で表す.

定理 2.7.2　1. $x \in A^\circ$ であるための必要十分条件は

$$\exists\, U \in \mathscr{U}(x) : U \subset A$$

2. $x \in \overline{A}$ であるための必要十分条件は

$$\forall\, U \in \mathscr{U}(x) : A \cap U \neq \emptyset$$

証明　1. $x \in A^\circ$ ならば, $A \in \mathscr{U}(x)$ となるので, $U = A$ とすれば, 必要性がわかる. 逆に, $U \subset A$ を満たす x の近傍 U が存在すれば, $x \in U^\circ$. ゆえに, $x \in A^\circ$.

2. $y \notin \overline{A}$ は問題 58 の 6 により $y \in (A^c)^\circ$ と同値である. 上の結果から, これは $\exists\, U \in \mathscr{U}(y) : U \subset A^c$ つまり, $\exists\, U \in \mathscr{U}(y) : U \cap A = \emptyset$ と同値である. ■

問題 61　1. $U \in \mathscr{U}(x) \Rightarrow x \in U$

2. $U, V \in \mathscr{U}(x) \Rightarrow U \cap V \in \mathscr{U}(x)$

3. $((U \subset V) \wedge (U \in \mathscr{U}(x))) \Rightarrow V \in \mathscr{U}(x)$

4. $U \in \mathscr{U}(x) \Rightarrow (\exists\, V \in \mathscr{U}(x) : (V \subset U) \wedge (\forall\, y \in V : U \in \mathscr{U}(y)))$

注 2 集合 X の各点 x ごとに問題 61 の 4 つの小問のすべてを満たすような集合族 $\mathscr{U}(x)$ が与えられたときに, X の任意の部分集合 A の内部を

$$\exists\, U \in \mathscr{U}(x) : U \subset A$$

を満たす点 x の全体として定義し, X の部分集合でその内部と一致しているものの全体のなす集合族を $\mathscr{T}$ とすれば, $(X, \mathscr{T})$ は位相空間になる．さらに, そのときこの位相空間から定まる x の近傍系は最初の $\mathscr{U}(x)$ と一致している．したがって, 位相空間を定義するときに, 各点ごとの近傍系を与えることにより始めることも多い．実際には, 位相のときと同じように, 近傍系そのものよりも, 次に定義する基本近傍系の形で与えるのが一般的である．

定義 2.7.3 近傍系 $\mathscr{U}(x)$ の部分集合族 $\mathscr{B}(x)$ が

$$\forall\, U \in \mathscr{U}(x)\ \exists\, V \in \mathscr{B}(x) : V \subset U$$

を満たすとき, $\mathscr{B}(x)$ を x における**基本近傍系**または**局所基**という．

例題 2.7.4 実数空間 $\mathbb{R}$ において, 定義 2.4.1 で与えた通常の位相を考える．このとき, 各 $x \in \mathbb{R}$ に対して, 開区間のなす集合族

$$\mathscr{B}(x) = \{(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}$$

は x における基本近傍系になる．区間 $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ を x の ε **近傍**といい, $U_\varepsilon(x)$ と表すことが多い．これは微積分の教科書などで, 収束を論じるときによく使われる概念である．

定義 2.7.5 位相空間 $(X, \mathscr{T})$ の部分集合 A と点 $x \in X$ に対して, $\forall\, U \in \mathscr{U}(x) : (A \setminus \{x\}) \cap U \neq \emptyset$ が成り立つとき, x を A の**集積点**という．また, $x \in A$ であって, $\exists\, U \in \mathscr{U}(x) : (A \setminus \{x\}) \cap U = \emptyset$ が成り立つとき, 点 x を A の**孤立点**という．

問題 62 1. $\mathbb{R}$ の通常の位相に関して, 部分集合 $\mathbb{Z}$ に集積点あるいは孤立点があれば、それらをすべて求めよ．

2. $\mathbb{R}$ の通常の位相に関して, 部分集合 $\{n^{-1} \mid n \in \mathbb{N}\}$ の集積点を求めよ．この部分集合に相対位相を与えたときに集積点はどうなるか．

3. 例 1.8.5 の Cantor 集合の集積点と孤立点を求めよ．

2.8　有向系と収束

==

キーワード 22 点列, 有向系, 収束

==

復習 17 1. 位相空間の定義

2. 開集合と閉集合の定義
3. 集合の内部および閉包の定義
4. 近傍の定義

==

ここでは点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の概念を一般化する.

定義 2.8.1 1. 順序集合 $(I, \prec)$ が

$$\forall\ i, j \in I\ \exists\ k \in I : (i \prec k) \wedge (j \prec k)$$

を満たすとき, この順序集合を**有向集合**という.

2. 集合 X において有向集合 $(I, \prec)$ の元を添え字にもつ部分集合を**有向系**または**ネット**といい, $\{x_i\}_{i\in I}$ で表す.

3. 有向集合 $(I, \prec)$ の部分集合 J が順序 $\prec$ に関して有向集合であり, さらに

$$\forall\ i \in I\ \exists\ j \in J : i \prec j$$

を満たすとき, $\{x_j\}_{j\in J}$ を $\{x_i\}_{i\in I}$ の**部分有向系**という.

例題 2.8.2 1. 自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ において通常の大小関係 $\leq$ を考えると, $(\mathbb{N}, \leq)$ は有向集合である. この場合の有向系 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は通常の**点列**である. とくに各 x_n が数のときが数列である.

2. 集合 X のべき集合 $\mathcal{P}(X)$ において, 集合の包含関係に関する順序を考えると, $(\mathcal{P}(X), \subset)$ は有向集合になる.

3. 問題 61 の 2 により, 近傍系 $\mathscr{U}(x)$ は集合の包含関係と逆の向きの順序に関して有向集合である.

4. 集合 $\mathbb{N}$ の有限部分集合の全体 $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ において, 集合の包含関係に関する順序を考える. ベクトル空間 E における可算部分集合 $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ が与えられたときに, 各 $U \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ ごとに $x_U = \sum_{n\in U} x_n$ とすれば, $\{x_U\}_{U\in\mathcal{F}(\mathbb{N})}$ は E におけるベクトルの有向系である.

定義 2.8.3 位相空間 $(X, \mathscr{T})$ における有向系 $\{x_i\}_{i\in I}$ が

$$\exists\, x \in X\ \forall\, U \in \mathscr{U}(x)\ \exists\, i_0 \in I\ \forall\, i \in I : i_0 \prec i \Rightarrow x_i \in U$$

を満たすとき, $\{x_i\}_{i\in I}$ は x へ**収束**するといい, $x = \lim_{i\in I} x_i$ または $x_i \to x$ で表す.

このとき, $\{x_i\}_{i\in I}$ を**収束有向系**, x をその**極限**ということがある.

問題 63 有向系が x へ収束すれば, その部分有向系も x へ収束することを示せ.

問題 64 実数の無限集合 $\{x_i \mid i \in I\}$ が与えられたとする. I の有限部分集合 J に対して $x_J = \sum_{i\in J} x_i$ とおく. I の有限部分集合全体のなす集合族 $\mathcal{F}(I)$ は包含関係により有向集合になるから, $\{x_J\}_{J\in\mathcal{F}(I)}$ は実数の有向系になる. これが収束するとき $\{x_i\}_{i\in I}$ は**総和可能**であるといい, その極限を $\sum_{i\in I} x_i$ で表す. このとき, 次のことを示せ.

1. $I_+ = \{i \in I \mid x_i \geq 0\},\ I_- = I \setminus I_+$ とする. $\{x_i\}_{i\in I}$ が総和可能であるための必要十分条件は $\{x_i\}_{i\in I_+}$ と $\{x_i\}_{i\in I_-}$ が総和可能なことである.

2. $\{x_i\}_{i\in I}$ が総和可能であることと $\{|x_i|\}_{i\in I}$ が総和可能であることは必要十分である.

定理 2.8.4 1. x が $\overline{A}$ の元であるための必要十分条件は

$$\exists\, \{x_i\}_{i\in I} \subset A : x_i \to x$$

2. A が閉集合であるための必要十分条件は

$$\forall\, x \in X : (\exists\, \{x_i\}_{i\in I} \subset A : x_i \to x) \Rightarrow x \in A$$

証明 1. $x \in \overline{A}$ とする. 任意の $U \in \mathscr{U}(x)$ に対して $U \cap A \neq \emptyset$ であるから, $U \cap A$ には元 x_U がある. このとき, 例題 2.8.2 の 3 により, $\{x_U\}_{u\in\mathscr{U}(x)}$ は有向系である. しかも, $V \subset U$ ならば $x_V \in U$ がいつでも成り立つので, $U_0 = U$ とすれば,

$$\forall\, U \in \mathscr{U}(x)\ \exists\, U_0 \in \mathscr{U}(x)\ \forall\, V \in \mathscr{U}(x) : U_0 \supset V \Rightarrow x_V \in U$$

逆に, $x_i \in A$ かつ $x_i \to x$ とする. このとき,

$$\forall\, U \in \mathscr{U}(x)\ \exists\, i_0 \in I\ \forall\, i \in I : i_0 \prec i \Rightarrow x_i \in U$$

となるので, 任意の $U \in \mathscr{U}(x)$ に対して $U \cap A \neq \emptyset$. ゆえに, $x \in \overline{A}$.

2. $A = \overline{A}$ ならば, 主張 1 により, 条件が成り立つ. また, $x \in \overline{A}$ ならば, 主張 1 と条件により, $x \in A$. ゆえに $\overline{A} = A$. ■

この定理により, 集合 A の閉包 $\overline{A}$ は A の元で近似できる元全体のなす集合であることがわかる.

2.9 写像の連続性

===

キーワード 23 連続,

===

復習 18 1. 位相空間, 開集合, 閉集合の定義

2. 集合の内部および閉包の定義
3. 近傍の定義
4. 有向系の定義
5. 有向系の収束の定義

===

2 つの位相空間 $(X, \mathscr{T}_X)$ と $(Y, \mathscr{T}_Y)$ を考える.

定義 2.9.1 X から Y への写像 f が

$$\forall\ V : V \in \mathscr{T}_Y \Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathscr{T}_X$$

を満たすとき, f は**連続**であるという.

定理 2.9.2 f を位相空間 $(X, \mathscr{T}_X)$ から位相空間 $(Y, \mathscr{T}_Y)$ への写像とする. このとき, 次の 3 条件は同値である.

1. f は連続である
2. $\forall\ x \in X\ \forall\ V \in \mathscr{U}(f(x))\ \exists\ U \in \mathscr{U}(x) : f(U) \subset V$
3. $\forall\ x \in X\ \forall\ \{x_i\}_{i \in I} : x_i \to x \Rightarrow f(x_i) \to f(x)$

ただし, $\{x_i\}_{i \in I}$ は有向系である.

証明 $1 \Rightarrow 2$. $V \in \mathscr{U}(f(x))$ とすれば, 近傍の定義により $f(x) \in V^\circ$. V° は開集合であるから, 条件 1 により, $f^{-1}(V^\circ) \in \mathscr{T}_X$. ここで, $U = f^{-1}(V^\circ)$ とすれば, $x \in U$. U は開集合であるから, $x \in U^\circ$ つまり $U \in \mathscr{U}(x)$. したがって, x の近傍 U で $U \subset f^{-1}(V^\circ)$ を満たすものが存在し, 条件 2 が成り立つ.

$2 \Rightarrow 1$. $V \in \mathscr{T}_Y$ とする. $x \in f^{-1}(V)$ ならば, $f(x) \in V$. V は開集合であるから, $V = V^\circ$. ゆえに $V \in \mathscr{U}(f(x))$. 条件 2 により, $f(U) \subset V$ を満たす近傍 $U \in \mathscr{U}(x)$ が存在する. ゆえに, $U \subset f^{-1}(V)$ となり $x \in f^{-1}(V)^\circ$. よって, $f^{-1}(V) = f^{-1}(V)^\circ$ となり, $f^{-1}(V) \in \mathscr{T}_X$.

$2 \Rightarrow 3$. 条件 2 を仮定すれば,

$$\forall\ x \in X\ \forall\ V \in \mathscr{U}(f(x))\ \exists\ U \in \mathscr{U}(x) : f(U) \subset V$$

$U \in \mathscr{U}(x)$ であるから, $x \in U^\circ$. もし $x_i \to x$ ならば,

$$\exists\, i_0 \in I \ \forall\, i \in I : i_0 \prec i \Rightarrow x_i \in U$$

ところで, $f(x_i) \in f(U) \subset V$ となるから, $f(x_i) \to f(x)$.

$3 \Rightarrow 2$. もし条件 2 が成り立たなければ,

$$\exists\, x \in X \ \exists\, V \in \mathscr{U}(f(x)) \ \forall\, U \in \mathscr{U}(x) : \neg(f(U) \subset V)$$

したがって, 各 $U \in \mathscr{U}(x)$ に対して, $f(x_U) \notin V$ を満たす $x_U \in U$ が存在する. 例 2.8.2 により, $\{x_U\}_{U \in \mathscr{U}(x)}$ は有向系である. このとき, 任意の $W \in \mathscr{U}(x)$ に対して, $W \subset U$ ならば $x_W \in U$ となるので, $x_U \to x$. よって, 条件 3 により, $f(x_U) \to f(x)$. ゆえに,

$$\exists\, U_0 \in \mathscr{U}(x) \ \forall\, U \in \mathscr{U}(x) : U \subset U_0 \Rightarrow f(x_U) \in V$$

となる. これは x_U の選び方と矛盾する. ■

上の定理の条件 2 または 3 において「$\forall\, x$」を省いた条件が成り立つとき, f は x において連続であるという. つまり, f が連続とは, すべての $x \in X$ で連続なことである.

問題 65 上の定理 2.9.2 の条件 1 (または 2) は位相 (または近傍系) の代わりに基 (または基本近傍系) を用いて $\forall\, V : V \in \mathscr{B}_Y \Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathscr{T}_X$ (または $\forall\, x \in X \ \forall\, V \in \mathscr{B}(f(x)) \ \exists\, U \in \mathscr{B}(x) : f(U) \subset V$) に置き換えられることを示せ.

問題 66 定理 2.9.2 の各条件は次の条件のいずれとも同値であることを示せ.

1. $\forall\, F : F \in \mathscr{F}_Y \Rightarrow f^{-1}(F) \in \mathscr{F}_X$
2. $\forall\, A \in \mathcal{P}(X) : f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$

ヒント. $1 \Rightarrow 2$, 補集合を考えよ. $2 \Rightarrow 1$, $A = f^{-1}(F)$ とせよ.

問題 67 $\mathbb{R}$ における和 $(x, y) \mapsto x + y$ と積 $(x, y) \mapsto xy$ は通常の位相に関して連続であることを示せ.

問題 68 写像 $f : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mapsto 1/x \in \mathbb{R}$ は連続であることを示せ.

問題 69 f, g を $(X, \mathscr{T})$ 上の連続な複素数値関数とする.

1. これらの和, 定数倍, 積, 複素共役

$$f + g, \quad af, \quad fg, \quad \overline{f}$$

も連続であることを示せ. ただし, $a \in \mathbb{C}$.

2. 集合 $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ は閉集合であることを示せ.

2.10　位相の強弱, 同相

==

キーワード 24 位相の強弱, 同相,

==

復習 19

1. 位相の定義
2. 逆像の性質
3. 写像の連続性の定義

==

定義 2.10.1 集合 X に 2 つの位相 $\mathscr{T}_1$ と $\mathscr{T}_2$ が与えられ, $\mathscr{T}_1 \subset \mathscr{T}_2$ を満たすとき, 位相 $\mathscr{T}_1$ は位相 $\mathscr{T}_2$ より**弱い**, あるいは位相 $\mathscr{T}_2$ は位相 $\mathscr{T}_1$ より**強い**という.

問題 70 $\mathbb{R}$ において, 次の位相の間の強弱を論じよ. 強い場合には真に強いかどうかも示せ.

1. 通常の位相と集合族 $\{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{Z},\ a<b\}$ を基にもつ位相.
2. 通常の位相と集合族 $\{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{Q},\ a<b\}$ を基にもつ位相.
3. 通常の位相と集合族 $\{[a,b) \mid a,b \in \mathbb{R},\ a<b\}$ を基にもつ位相.

問題 71 f を X から Y への写像とする.

1. Y 上の位相 $\mathscr{T}_Y$ を用いて得られる X の部分集合族
$$\mathscr{T}'_X = \{f^{-1}(V) \mid V \in \mathscr{T}_Y\}$$
は X 上の位相であることを示せ.
2. X 上の位相 $\mathscr{T}_X$ を用いて得られる Y の部分集合族
$$\mathscr{T}'_Y = \{V \mid f^{-1}(V) \in \mathscr{T}_X\}$$
は Y 上の位相 ($\mathscr{T}_X$ の**商位相**と呼ばれている) であることを示せ.
3. 次の 3 条件は同値であることを示せ.
   a. $f : (X, \mathscr{T}_X) \to (Y, \mathscr{T}_Y)$ は連続である
   b. $\mathscr{T}'_X \subset \mathscr{T}_X$
   c. $\mathscr{T}_Y \subset \mathscr{T}'_Y$

問題 72 上の問題を続けて考える.

1. X における位相 $\mathscr{T}_X'$ は写像 $f : X \to (Y, \mathscr{T}_Y)$ を連続にする位相の中で最弱であることを示せ.

2. Y における位相 $\mathscr{T}_Y'$ は写像 $f : (X, \mathscr{T}_X) \to Y$ を連続にする位相の中で最強であることを示せ.

定義 2.10.2 1. 写像 f が全単射かつ連続で, 逆写像 f^{-1} も連続のとき, f を**同相写像**という.

2. ２つの位相空間の間に同相写像が存在するとき, それらの位相空間は**同相**であるという.

例え話として, １つ穴のドーナツと穴のある取っ手を１つもつコーヒーカップは同相であるといわれる.

問題 73 $\mathbb{R}$ における通常の位相を $\mathscr{T}$ とし, $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}^2$ への写像 f を $x \mapsto (x, 0)$ とする. $f(\mathbb{R})$ において, $\mathbb{R}^2$ の通常の位相から導かれる相対位相を $\mathscr{T}_f$ とすれば, 写像 $f : (\mathbb{R}, \mathscr{T}) \to (f(\mathbb{R}), \mathscr{T}_f)$ は同相写像であることを示せ.

問題 74 問題 71 の記号をそのまま用いる. X から Y への全単射 f に対して, 次の３条件は同値であることを示せ.

1. $f : (X, \mathscr{T}_X) \to (Y, \mathscr{T}_Y)$ は同相である

2. $\mathscr{T}_X' = \mathscr{T}_X$

3. $\mathscr{T}_Y = \mathscr{T}_Y'$

例題 2.10.3 (特殊ユニタリ群) 行列式の値が 1 の 2×2 ユニタリ行列の全体を $SU(2)$ とする. 一般に, 2×2 ユニタリ行列 $U = (u_{ij})$ は $u_{11} = \overline{u_{22}}$ と $u_{12} = -\overline{u_{21}}$ を満たす. ここで, $u_{11} = x + iy$, $u_{12} = z + iw$ $(x, y, z, w \in \mathbb{R})$ とすれば, $\det U = |u_{11}|^2 + |u_{12}|^2$ となるから, $SU(2)$ は写像 $(u_{ij}) \mapsto (x, y, z, w)$ により 3 次元球面 $S^3 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\}$ と同相になる.

問題 75 次の写像は自然な位相に関して同相であることを示せ.

1. $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \exp t \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$

2. $f : t \in (-1, 1) \mapsto \tan(\pi t/2) \in \mathbb{R}$

3. $\mathbb{R}^2$ の単位円 $S^1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ 上では相対位相と写像 $f : t \in \mathbb{R} \mapsto (\cos t, \sin t) \in S^1$ による商位相とが同相である.

4. $\mathbb{R}^2$ の相対位相の関して, 単位円 S^1 と菱形 $\{(x, y) \mid |x| + |y| = 1\}$ と正方形 $\{(x, y) \mid \max\{|x|, |y|\} = 1\}$

2.11　第２可算公理と可分性

==

キーワード 25 第１可算公理, 第２可算公理, 可分性

==

復習 20　1. 位相および位相の基の定義

2. 近傍系および基本近傍系の定義
3. 写像の連続性の定義
4. 位相の強, 弱の定義

==

さまざまな具体例の中で連続性を論じるときには, もっぱら位相の基を使うことが多いが, このとき, さらに基が可算に選べると, 議論が簡潔になり, 内容がさらに深められることが多い.

$(X, \mathscr{T})$ を位相空間とする.

定義 2.11.1　1. 各点 $x \in X$ の基本近傍系として可算なものが選べるとき, 位相空間は**第１可算公理**を満たすという.

2. 位相空間の基として可算なものが選べるとき, 位相空間は**第２可算公理**を満たすという.
3. X が稠密な可算部分集合をもつとき, X は**可分**であるという.

例題 2.11.2 第 2 可算公理が成り立てば自動的に第 1 可算公理も成り立つ. また, 第 2 可算公理が成り立てば可分でもある. 実際, 可算基を $\mathscr{B}$ とする. このとき, $\mathscr{B}$ の各元から 1 点を取りだし, それらを集めた集合を A とすれば, A は可算集合である. また, もし $\overline{A}$ の補集合は開集合であるから, それが空でなければ, それに含まれる基の元が存在することになり A の作り方と矛盾する.

例題 2.11.3 $\mathbb{R}$ における可算集合族 $\{U_\varepsilon(r) \mid r, \varepsilon \in \mathbb{Q},\ \varepsilon > 0\}$ は $\mathbb{R}$ における通常の位相の基になっている. したがって, $\mathbb{R}$ は通常の位相に関して第 2 可算公理を満たす. しかし離散位相に関しては可分ではないから, 第 2 可算公理は満たさない.

例題 2.11.4 可分であるからといって, 第 2 可算公理が成り立つわけではない. 実際, 問題 44 の位相空間は問題 60 の 2 の結果により可分である. ここで, 空間 X が非可算であることと, 可算基 $\mathscr{B}$ の存在を仮定する. 各 $x \in X$ に対して, $\{x\} = \bigcap_{U \in \mathscr{T},\, x \in U} U$ となるので, $\{x\} = \bigcap_{U \in \mathscr{B},\, x \in U} U$ と表せる. ここで, 左辺の補集合は非可算なのに, 右辺の補集合は可算となり矛盾する.

問題 76 1. $\mathbb{R}^2$ は通常の位相に関して, 第 2 可算公理を満たすことを示せ.

2. 2 次元球面 $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ は第 2 可算公理を満たすことを示せ.

命題 2.11.5 位相空間が第 1 可算公理を満たしているとき, $x \in \overline{A}$ であるための必要十分条件は x に収束する A の点列が存在することである.

証明 十分性は明らかであるから, 必要性を示す. 第 1 可算公理が満たされれば, 各点 $x \in \overline{A}$ に可算基本近傍系 $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ が存在する. 最初の方から順次共通部分を考えることにより, $U_n \subset U_{n+1},\ n \in \mathbb{N}$ と仮定することができる. 各 n に対して $A \cap U_n \neq \emptyset$ であるから, この集合に含まれる元 x_n が存在する. 任意の $U \in \mathscr{U}(x)$ に対して, $U_n \subset U$ を満たす $n \in \mathbb{N}$ が存在する. このとき, $m \geq n$ ならば, $x_m \in U_m \subset U_n \subset U$. よって, 点列 $\{x_n\}_n$ は x へ収束する. ■

問題 77 位相空間 X, Y がともに第 1 可算公理を満たしているときには, 定理 2.9.2 の条件 3 における有向系は点列に置き換えられることを証明せよ.

問題 78 位相空間 X から位相空間 Y への全射連続写像を f とする. もし X が可分ならば, Y も可分であることを示せ.

問題 79 $\mathbb{R}$ において集合族 $\mathscr{B} = \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ の生成する位相を $\mathscr{T}$ とする. このとき, 位相空間 $(\mathbb{R}, \mathscr{T})$ は可分ではあるが, 第 2 可算公理は満たさないことを示せ. ヒント：各 $x \in \mathbb{R}$ に対して, どの基も x を下限にもつある集合を含む.

2.12　距離空間は位相空間である

==

キーワード 26 距離空間, ε 近傍,

==

復習 21　1. 位相空間, 開集合, 閉集合の定義

2. 集合の内部および閉包の定義

3. 有向系の定義

4. 写像の連続性の定義

==

定義 2.12.1 集合 X の次の 3 条件を満たす写像 $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ が与えられたとき, 写像を**距離**, 集合を**距離空間**といい, (X, d) で表す.

1. $\forall\ x, y \in X : d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\forall\ x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$
3. $\forall\ x, y, z \in X : d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

条件 1 を非退化性, 2 を対称性, 3 を三角不等式という.

定義 2.12.2 距離空間 (X, d) において, 各 $x \in X$ と正数 ε により定まる集合

$$U_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$$

を x の ε **近傍**という.

定理 2.3.2 により, 集合族 $\{U_\varepsilon(x) \mid x \in X, \varepsilon > 0\}$ はある位相の基であることがわかる. この位相を距離空間 (X, d) の位相といい, $\mathscr{T}_d$ で表す.

問題 80 この集合族が位相の基であることを示し, 次の定理が成り立つことを示せ.

定理 2.12.3 (X, d) を距離空間とする. X の各部分集合 A に対して定まる集合

$$\{x \in X \mid \exists\ \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \subset A\} \tag{2.3}$$

全体のなす集合族は X 上の位相 $\mathscr{T}_d$ と一致する.

この位相により定まる位相空間の開集合は距離を用いて (2.3) 式で与えられている. したがって, この集合は A の内部 A° を表している.

問題 81 次の集合 X 上に与えられる写像 d により定まる (X,d) は距離空間であることを示せ.

1. $X=\mathbb{R}$ かつ $d(x,y)=|x-y|$
2. $X=\{x\in\mathbb{R}:x>0\}$ かつ $d(x,y)=|\log x-\log y|$
3. $X=(-\pi/2,\pi/2)$ かつ $d(x,y)=|\tan x-\tan y|$
4. $X=\mathbb{R}^2$ かつ $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|$
5. $X=\mathbb{R}^2$ かつ $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$. ヒント : 三角不等式の証明には Schwarz の不等式 $(x_1y_1+x_2y_2)^2\leq(x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2)$ を使え.
6. $X=\mathbb{R}^2$ かつ $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\max\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|\}$
7. 空でない任意の集合 X において,
$$d(x,y)=\begin{cases}1 & (x\neq y)\\ 0 & (x=y)\end{cases}$$
8. 閉区間 $[0,1]$ 上の連続関数の全体の集合 $C([0,1])$ において,
$$d(f,g)=\sup\{|f(t)-g(t)|\mid t\in[0,1]\}$$

上の問題の 1 は通常の 2 点間の距離である. 問題の 1 と 2 の距離空間は同相である. 問題の 5 の距離は Euclid の距離とよばれ, 2 次元平面で通常に使われてきた距離である. 問題の 4, 5, 6 は距離空間としては違っていても位相空間としては同相である.

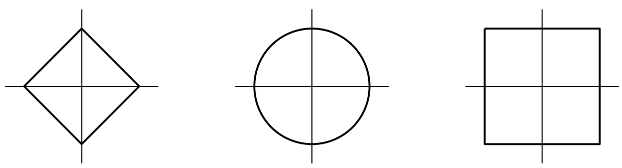

図 2.1: 左から問題の 4, 5, 6 の原点における ε 近傍の図

問題 82 1. 上の問題の 1, 2 の距離空間は互いに同相であることを示せ.

2. 上の問題の 4, 5, 6 の距離空間は互いに同相であることを示せ.
3. 距離空間は第 1 可算公理を満たすことを示せ.
4. 可分な距離空間は第 2 可算公理を満たすことを示せ.
5. 距離空間において, 点 x と空でない部分集合 A の間の距離を $d(x,A)=\inf\{d(x,y)\mid y\in A\}$ とする. このとき, $a\in\overline{A}$ であるための必要十分条件は $d(a,A)=0$ であることを示せ.

2.13　完備距離空間

===

キーワード 27 Cauchy **列, 収束列, 完備, 第 2 類**

===

復習 22　1. 距離空間

2. ε 近傍

===

定義 2.13.1 距離空間 (X, d) において

1. 点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\ n, m \in \mathbb{N} : n, m \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

を満たすとき, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を **Cauchy 列**という.

2. 点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が

$$\exists\ x \in X\ \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\ n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$$

を満たすとき, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を**収束列**, x をその極限といい, $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ または $x_n \to x$ で表す. このとき, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は x へ収束するともいう.

定義 2.13.2 距離空間において, 任意の Cauchy 列が収束列であるとき, 距離空間は**完備**であるという.

実数空間は通常の位相に関して完備であった. 問題 81 の 1, 2 の同相な距離空間を較べてみればわかるように, 完備性は位相により決まる概念ではなく, 距離の与え方に依存して決まる概念である.

問題 83　1. $\mathbb{R}^2$ は Euclid の距離に関して完備であることを示せ.

2. 問題 81 の 8 の距離空間 $(C([0,1]), d)$ は完備であることを示せ. ここで, $d(f_n, f) \to 0$ と f_n が f へ一様収束することは必要十分であることに注意せよ.

3. 完備距離空間の閉部分集合は完備であることを示せ.

4. 距離空間 (X, d_X) から距離空間 (Y, d_Y) への写像 f が連続であるための必要十分条件は

$$\forall\ x \in X\ \forall\ \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$$

であることを示せ.

完備性は実数の基本性質の 1 つであり, Euclid 空間はその性質を引き継いでいる．この概念のもつ特質の 1 つを抽出したものが, つぎに定義する第 2 類という概念である．

定義 2.13.3 位相空間 $(X, \mathscr{T})$ の部分集合 A に対して,

1. $(\overline{A})^\circ = \emptyset$ のとき, **疎**という．
2. 可算個の疎な集合の和集合として表せるとき, **第 1 類**という．
3. 第 1 類でないとき, **第 2 類**という．

例えば, 離散空間や, 区間 $[0,1]$ における Cantor の 3 進集合などは疎な集合である．

問題 84 位相空間 $(X, \mathscr{T})$ において, その部分集合 A が疎であることと A^c の内部が X で稠密なことは必要十分であることを示せ．

定理 2.13.4 (Baire) 完備な距離空間は第 2 類である．

証明　背理法による．完備な距離空間 X が第 1 類であるとすれば, 疎な集合 A_n, $n \in \mathbb{N}$ を用いて $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ と表せる．A_n の閉包も疎であるから, 各 A_n は閉集合と仮定できる．A_1 は疎であるから, A_1^c は X で稠密な開集合である．ゆえに,

$$\exists\ x_1 \in A_1^c\ \exists\ \varepsilon_1 \in (0,1) : \overline{U_{\varepsilon_1}(x_1)} \subset A_1^c$$

A_2 は疎であるから, $U_{\varepsilon_1}(x_1) \setminus A_2$ は空でない開集合である．ゆえに,

$$\exists\ x_2 \in U_{\varepsilon_1}(x_1) \setminus A_2\ \exists\ \varepsilon_2 \in (0, \min\{1/2, \varepsilon_1\}) : \overline{U_{\varepsilon_2}(x_2)} \subset U_{\varepsilon_1}(x_1) \setminus A_2$$

このとき, $\overline{U_{\varepsilon_2}(x_2)} \subset (A_1 \cup A_2)^c$. 以下, この議論を繰り返すと, X の点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と 0 へ単調収束する正数の列 $\{\varepsilon_n\}_{\in\mathbb{N}}$ で

$$d(x_n, x_{n+1}) < \frac{1}{2^n}, \quad \overline{U_{\varepsilon_n}(x_n)} \subset (A_1 \cup \cdots \cup A_n)^c$$

を満たすものが選べる．ゆえに,

$$\forall\ m : m > n \Rightarrow d(x_n, x_m) < \frac{1}{2^{n-1}}$$

となり, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は Cauchy 列である．距離空間には完備性が仮定されていたので, $x_n \to x$ となる $x \in X$ が存在する．

$$\forall\ m : m \geq n \Rightarrow x_m \in U_{\varepsilon_n}(x_n)$$

であるから, $x \in (A_1 \cup \cdots \cup A_n)^c$. よって, $x \notin A_1 \cup \cdots \cup A_n$ がすべての n に対して成り立つので, $x \notin X$ となり矛盾が生じた．■

2.14　補充問題

第２．１節

第２．２節

1. 集合 $X = \{a, b, c\}$ に位相をあたえよ．何種類あるか．

2. $X = \{a, b, c, d\}$ の 2 つの部分集合族

$$\mathscr{T}_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, X\}$$

$$\mathscr{T}_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, d\}, X\}$$

を考える．

a. $\mathscr{T}_1$ は X に位相を与えるが, $\mathscr{T}_2$ は位相にならないことを示せ．

b. 位相空間 $(X, \mathscr{T}_1)$ における閉集合をかけ．

3. 集合 $X = \{a, b, c, d, e\}$ の部分集合

$$\emptyset,\ \{b\},\ \{c\},\ \{b, c\},\ \{c, d\},\ \{a, e\},\ \{b, c, d\}$$

$$\{a, b, e\},\ \{a, c, e\},\ \{a, b, c, e\},\ \{a, c, d, e\},\ X$$

のなす集合族を $\mathscr{T}$ とする．

a. $(X, \mathscr{T})$ は位相空間になることを示せ．

b. $\{a, b, c\}, \{a, d, e\}, \{b, c, d\}$ のうち閉集合, 開集合はどれか．

c. 閉集合かつ開集合であるものをかけ．

4.
a. $\mathscr{T}_1 \cap \mathscr{T}_2$ はまた X の位相であることを示せ．

b. $\mathscr{T}_1 \cup \mathscr{T}_2$ は必ずしも X の位相にならない．例をあげて説明せよ．

5.
a. $\mathbb{R}$ において, 開区間

$$(a, a) = \emptyset, \quad (a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

の可算和全体のなす集合族 $\mathscr{T}$ は $\mathbb{R}$ における位相であることを示せ．
(これは $\mathbb{R}$ における通常の位相となる．)

b. この位相に関して閉区間 $[a, b]$ は閉集合であることを示せ．

c. この位相に関して次の集合は開集合か, 閉集合か

$$[a, b), \quad (a, b], \quad (-\infty, b], \quad \{a\}$$

6. $\mathscr{T} = \{\mathbb{R}, \emptyset\} \cup \{(q, \infty) \mid q \in \mathbb{Q}\}$ は $\mathbb{R}$ の位相になるか．

7. $\mathscr{T} = \{\mathbb{R}, \emptyset\} \cup \{(x, \infty) \mid x \in \mathbb{R}\}$ は $\mathbb{R}$ の位相になるか．

8. X を空でない集合とする．直積集合 $X \times X$ 上で次の 3 条件

a. 任意の $x, y \in X$ に対して $d(x, y) \geq 0$ であり, $d(x, y) = 0$ となるのは $x = y$ のとき, そのときに限る.

b. 任意の $x, y \in X$ に対して $d(x, y) = d(y, x)$

c. 任意の $x, y \in X$ に対して $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

を満たす実数値関数 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ を**距離**という. このような距離の与えられた集合を**距離空間**といい, 対 (X, d) で表す. 距離空間 (X, d) において, 集合

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in X \mid d(a, x) < \varepsilon\}$$

を点 a の ε-**近傍**という. X の部分集合 A が, $\forall\, a \in A$ について $\exists\, U_\varepsilon(a) \subset A$ を満たすとき, 集合 A を開集合という. いま, $\mathcal{O}$ をこのような開集合全体の集合族とすると $(X, \mathcal{O})$ は位相空間となることを示せ. この位相を**距離 d から誘導された位相**という.

9. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 上の関数 d を $d(x, y) = |x - y|$ で定義する.

   a. d は X の距離となることを示せ.

   b. $a \in \mathbb{R}$ の ε-近傍は $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ であることを示せ.

   c. 開区間 (a, b) はこの距離から誘導される位相で開集合であることを示せ.

10. $\mathbb{R}^n$ の 2 元 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_n)$ に対して,

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

とおけば, d は $\mathbb{R}^n$ における距離となることを示せ.

11. 上の距離 d から誘導される $\mathbb{R}^n$ の位相を $\mathcal{O}_d$ とする.

   a. $\mathbb{R}^n$ の点 $\boldsymbol{a}$ の ε-近傍はどんな集合か. n が 1 のとき, 2 のとき, 3 のときを図示せよ.

   b. この位相 $\mathcal{O}_d$ に関して直積集合 $(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ は開集合であることを示せ.

第 3 節

1.

第 4 節

1.

第 5 節

1.

第 6 節

1. 集合 X の空でない部分集合のなす集合族 $\varPhi$ が

   a. $\forall\, U\ \forall\, V : (U \in \varPhi) \wedge (U \subset V) \Rightarrow V \in \varPhi$
   b. $\forall\, U\ \forall\, V : U,\ V \in \varPhi \Rightarrow U \cap V \in \varPhi$

   を満たすとき**フィルター**という．このとき, 次のことを示せ．

   a. 位相空間 X において, 各点 x の近傍系 $\mathscr{U}(x)$ はフィルターである．
   b. X の空でない部分集合のなす集合族 $\varPhi_0$ が

   $$\forall\, U\ \forall\, V : U,\ V \in \varPhi_0 \Rightarrow (\exists\, W \in \varPhi_0 : W \subset U \cap V)$$

   を満たすとする (フィルターの基という)．このとき, 集合族 $\varPhi = \{W \mid \exists\, U \in \varPhi : U \subset W\}$ はフィルターである ($\varPhi_0$ の生成するフィルターという)．
   c. 有向系 $\{x_i\}_{i\in I}$ に対して, 各 $i \in I$ に対して $U_i = \{x_j \mid i \prec j\}$ とおいて得られる集合族 $\varPhi_0 = \{U_i \mid i \in I\}$ はフィルターの基である．この基の生成するフィルターを $\varPhi$ とする．
   d. 位相空間 X の有向系 $\{x_i\}_{i\in I}$ が x へ収束するための必要十分条件は $\mathscr{U}(x) \subset \varPhi$.

2.

第７節

1.

第８節

1.

第９節

1.

第１０節

1. 距離空間 X の閉部分集合 A 上の実数値連続関数 f を X 上へ拡張した実数値連続関数 g で

   $$\sup_{x\in X} g(x) = \sup_{a\in A} f(a), \quad \inf_{x\in X} g(x) = \inf_{a\in A} f(a)$$

   を満たすものがあることを示せ．ヒント：$\inf_{a\in A} f(a) = 1$, $\sup_{a\in A} f(a) = 2$ と仮定できる．$x \in A^c$ に対しては $g(x) = \inf_{a\in A}(f(a)d(x,a)/d(x,A)$ とする．

第１１節

1.

第１２節

1.

2.15　試験問題

集合・位相 II 中間試験 (平成 15 年 11 月 17 日)

集合 X の部分集合族 $\mathscr{T}$ が次の 3 条件を満たすとき, $\mathscr{T}$ を X における**位相**という.

1. $\emptyset, X \in \mathscr{T}$
2. $A, B \in \mathscr{T} \Rightarrow A \cap B \in \mathscr{T}$
3. $A_i \in \mathscr{T}\ (i \in I) \Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \in \mathscr{T}$

また, このような位相 $\mathscr{T}$ の与えられた集合 X を**位相空間**といい, $(X, \mathscr{T})$ で表す.

1. $X = \{a, b, c\}, \mathscr{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, X\}$ とする. (60)
   a. $\mathscr{T}$ は X にける位相であることを示せ.
   b. 位相空間 $(X, \mathscr{T})$ における閉集合全体のなす集合族 $\mathscr{F}$ を求めよ.
   c. 次の各集合の内部と閉包を求めよ.
   $$\{b\}, \quad \{c\}, \quad \{a, c\}, \quad \{b, c\}$$
2. $\mathbb{R}$ において, 開区間全体のなす集合族を $\mathscr{B}$ とする. (30)
   a. 集合族 $\mathscr{T} = \{\bigcup_{U\in\mathscr{C}} U \mid \mathscr{C} \subset \mathscr{B}\}$ は $\mathbb{R}$ における位相であることを示せ.
   b. 位相空間 $(\mathbb{R}, \mathscr{T})$ において, 閉区間は閉集合であることを示せ.
   c. 半開区間 $[a, b)$ は開集合でも閉集合でもないことを示せ.
3. X を無限集合とする. (20)
   a. X の部分集合族
   $$\mathscr{T} = \{A^c \mid A \text{ は } X \text{ の有限部分集合 }\} \cup \{\emptyset\}$$
   は X における位相であることを示せ.
   b. B を X の無限部分集合とすれば, B は X において稠密であること, つまり B の閉包が X になることを示せ.

集合・位相 II, 期末試験 (平成 16 年 1 月 19 日)

1. $\mathbb{R}$ において通常の位相を考え, f をその上の実数値関数とする.

a. 関数 f が連続ならば, 任意の実数 c に対して, 集合

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < c\}$$

は開集合であることを示せ. (10)

b. 任意の実数 c に対して, 集合

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < c\}, \quad \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > c\}$$

がともに開集合ならば, 関数 f は連続であることを示せ. (20)

2. a. 距離空間 $(\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}, d)$ から距離空間 $(\mathbb{R}, d)$ への写像 f を $f(x) = \log x$ とする. ただし, $d(x, y) = |x - y|$. このとき, この写像 f は同相写像であることを示せ. このとき, 対数関数や指数関数の連続性はわかっているものとしてよい. (20)

b. 集合 $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ において,

$$d'(x, y) = |\log x - \log y|$$

は距離の条件を満たすことを示せ. (10)

c. 集合 $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ は距離 $d(x, y) = |x - y|$ に関しては完備ではないが, 距離 $d'(x, y) = |\log x - \log y|$ に関しては完備であることを示せ. (20)

3. $\mathbb{R}$ は通常の位相に関して, 第 2 可算公理を満たすことを示せ. (20)

4. $\mathbb{R}^2$ において $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$ とすれば, $(\mathbb{R}^2, d)$ は距離空間であることを示せ. ただし, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$. (20)

集合 · 位相 II, 期末試験解答例

1. a. 区間 $U = (-\infty, c)$ は開集合である. 関数 f が連続であるから, その逆像 $f^{-1}(U) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < c\}$ も開集合である.

b. 通常の位相の基 $\mathcal{B}$ の任意の元 (a, b) に対して,

$$\begin{aligned} f^{-1}((a, b)) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < f(x) < b\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < b\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > a\} \end{aligned}$$

と表せる. このとき, 右辺は開集合であるから, f は連続である.

2. a. $0 < x < y$ ならば, $f(y) - f(x) = \log(y/x) > 0$ となるから, 写像 f は単射である. 任意の $z \in \mathbb{R}$ に対して, $y = \exp z$ とすれば, $f(y) = z$ であるから, f は全射である. また, 対数関数と指数関数は連続であるから, f は同相写像である.

b. $d'(x,y) \geq 0$ であることは明らか. $d'(x,y) = 0 \Leftrightarrow \log(x/y) = \log x - \log y = 0 \Leftrightarrow x/y = 1 \Leftrightarrow x = y$. $d'(x,y) = |\log x - \log y| = d'(y,x)$. $d'(x,y) = |\log x - \log y| \leq |\log x - \log z| + |\log z - \log y| = d'(x,z) + d'(z,y)$.

c. 距離空間 $(\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}, d')$ から距離空間 $(\mathbb{R}, d)$ への写像 $f(x) = \log x$ を考える. このとき, $d'(x,y) = |f(x) - f(y)| = d(f(x), f(y))$ が成り立つので, f は距離を保存する. よって, 距離空間 $(\mathbb{R}, d)$ の完備性により, $(\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}, d')$ も完備である. しかし, 距離空間 $(\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}, d)$ において, $a_n = 1/n$ とおいて得られる列 $\{a_n\}$ は Cauchy 列であるが収束列ではない. よってこの後の距離空間は完備ではない.

3. 例題 2.7.3 を参照せよ.

4. 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対して, $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq 0$ は明らかである.

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \Leftrightarrow x_1 - y_1 = x_2 - y_2 = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$$
$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} = d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$$

また, 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} = (z_1, z_2)$ と $i \in \{1, 2\}$ に対して, 次の不等式

$$|x_i - y_i| \leq |x_i - z_i| + |z_i - y_i| \leq d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + d(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y})$$

が成り立つので,

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} \leq d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + d(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y})$$

集合・位相 II 期中間試験 (平成 17 年 11 月 14 日)

1. $\mathbb{R}$ の有限半開区間のなす集合族

$$\{[a,b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$$

はある位相の基であることを示せ. (20)

2. $\mathbb{R}$ の有限開区間のなす集合族

$$\{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$$

を基にもつ位相を通常の位相といった. この位相に関して, 次のことを示せ. (60)

a. $(0, \infty)$ は開集合である.

b. $[0, \infty)$ は閉集合である.

c. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ は開集合である.

d. $\mathbb{Z}$ は閉集合である.

e. 半開区間 $[1,2)$ は開集合でも閉集合でもない.

f. 開区間の共通部分 $\bigcap_{n=1}^{\infty}(-1-(1/n), 1+(1/n))$ は閉集合である.

3. $\mathbb{R}^2$ の通常の位相に関して, 線分 $\{(x,0) \in \mathbb{R}^4 \mid |x| \leq 1\}$ は閉集合であることを示せ. (30)

4. $\mathbb{R}^2$ の通常の位相に関して, 半平面 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\}$ は開集合であることを示せ. (30)

集合 · 位相 II 期末試験 (平成 18 年 1 月 16 日)

1. を位相空間 $(X, \mathscr{T}_X)$ から位相空間 $(Y, \mathscr{T}_Y)$ への写像 f に対して, 次の 3 条件は同値であることを示せ.

a. f は連続である

b. $\forall\, x \in X\ \forall\, V \in \mathscr{U}(f(x))\ \exists\, U \in \mathscr{U}(x) : f(U) \subset V$

c. $\forall\, x \in X\ \forall\, \{x_i\}_{i \in I} : x_i \to x \Rightarrow f(x_i) \to f(x)$

ただし, $\{x_i\}_{i \in I}$ は有向系である. (60)

2. 位相空間 X から位相空間 Y への全射連続写像を f とする. もし X が可分ならば, Y も可分であることを示せ. (20)

3. 集合 $X = \mathbb{R}^2$ 上に与えられる写像 $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$ により定まる (X,d) は距離空間であることを示せ. (30)

4. 距離空間 (X,d) において, $\overline{U_\varepsilon(x)} \subset U_{2\varepsilon}(x)$ が成り立つことを示せ. (20)

集合 · 位相 II 期末試験 (平成 20 年 1 月 21 日)

1. A, B を $\mathbb{R}$ の空でない有界部分集合とする.

a. $a = \sup A$ であることは次の 2 条件が成り立つことと同値である.

$$\text{(i)}\ \forall\, x \in A : x \leq a, \quad \text{(ii)}\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, x \in A : a - \varepsilon < x.$$

このことを参考にして, $b = \inf B$ に対しても同様な条件を求めよ. (20)

b. $\sup(-A) = -\inf A$ を示せ. ただし, $-A = \{-x \mid x \in A\}$. (20)

2. 次のことを示せ.

a. $A^\circ = \bigcup_{G \in \mathscr{T},\ G \subset A} G$. (20)

b. $\overline{A} = \bigcap_{F \in \mathscr{F},\ A \subset F} F$. (20)

ただし, $\mathscr{F}$ は閉集合族 $\{F \mid \in F^c \in \mathscr{T}\}$ である.

3. $x \in \overline{A}$ であるための必要十分条件は

$$\forall\, U \in \mathscr{U}(x) : A \cap U \neq \emptyset$$

であることを示せ. (20)

4. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 上の関数 $f(x) = 1/x$ は連続であることを示せ. (20)

期末試験 (集合 · 位相 II) 解答例

1. A, B を $\mathbb{R}$ の空でない有界部分集合とする.

   a. $a = \sup A$ であることは次の 2 条件が成り立つことと同値である.

   $$\text{(i)}\ \forall\, x \in A : x \leq a, \quad \text{(ii)}\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, x \in A : a - \varepsilon < x.$$

   このことを参考にして, $b = \inf B$ に対しても同様な条件を求めよ. (20)

   解.

   $$\text{(i)}\ \forall\, x \in B : x \geq b, \quad \text{(ii)}\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, x \in B : b + \varepsilon > x.$$

   b. $\sup(-A) = -\inf A$ を示せ. ただし, $-A = \{-x \mid x \in A\}$. (20)

   解.

   $$\begin{aligned}
   & a = \sup(-A) \\
   & \Leftrightarrow \forall\, x \in (-A) : x \leq a \quad \text{かつ} \quad \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, x \in (-A) : a - \varepsilon < x \\
   & \Leftrightarrow \forall\, y \in A : -y \leq a \quad \text{かつ} \quad \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, y \in A : a - \varepsilon < -y \\
   & \Leftrightarrow \forall\, y \in A : y \geq -a \quad \text{かつ} \quad \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, y \in A : -a + \varepsilon > y \\
   & \Leftrightarrow -a = \inf A \\
   & \Leftrightarrow a = -\inf A
   \end{aligned}$$

2. 次のことを示せ.

   a. $A^\circ = \bigcup_{G \in \mathscr{T},\ G \subset A} G$. (20)

   解. 開集合の和集合は開集合であるから, $\bigcup_{G \in \mathscr{T},\ G \subset A} G$ は A に含まれる開集合である. A に含まれる開集合はどれもこれに含まれるから, $\bigcup_{G \in \mathscr{T},\ G \subset A} G$ は A に含まれる最大の開集合 A° である.

   b. $\overline{A} = \bigcap_{F \in \mathscr{F},\ A \subset F} F$. ただし, $\mathscr{F}$ は閉集合族 $\{F \mid \in F^c \in \mathscr{T}\}$ である. (20)

   解. 閉集合の共通部分は閉集合であるから, $\bigcap_{F \in \mathscr{F},\ A \subset F} F$ は A を含む閉集合である. A を含む閉集合はどれもこれを含むから, $\bigcap_{F \in \mathscr{F},\ A \subset F} F$ は A を含む最小の閉集合 $\overline{A}$ である.

3. $x \in \overline{A}$ であるための必要十分条件は

$$\forall\, U \in \mathscr{U}(x) : A \cap U \neq \emptyset$$

であることを示せ. (20)

解. $\overline{A} = \bigcap_{F \in \mathscr{F},\ A \subset F} F$ であるから, 次の言い換えができる.

$$\begin{aligned} x \in \overline{A} &\Leftrightarrow \forall\, F \in \mathscr{F} : A \subset F \Rightarrow x \in F \\ &\Leftrightarrow \forall\, V \in \mathscr{T} : A \subset V^c \Rightarrow x \in V^c \\ &\Leftrightarrow \forall\, V \in \mathscr{T} : x \in V \Rightarrow A \cap V \neq \emptyset \end{aligned}$$

$x \in \overline{A}$ ならば, 任意の $U \in \mathscr{U}(x)$ に対して, $x \in U^\circ$ かつ $U^\circ \in \mathscr{T}$ となるから, 上の言い換えにより $A \cap U^\circ \neq \emptyset$. 他方 $A \cap U^\circ \subset A \cap U$ であるから, $\forall\, U : U \in \mathscr{U}(x) \Rightarrow A \cap U \neq \emptyset$.

逆に, $\forall\, U : U \in \mathscr{U}(x) \Rightarrow A \cap U \neq \emptyset$ とする. 任意の $V \in \mathscr{T}$ に対して, $x \in V$ ならば, $V = V^\circ$ であるから, $V \in \mathscr{U}(x)$ が成り立ち, $A \cap V \neq \emptyset$ となる. したがって, 上の言い換えにより $x \in \overline{A}$.

4. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 上の関数 $f(x) = 1/x$ は連続であることを示せ. (20)

解. 開区間 (a, b) の写像 f による逆像 $\{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mid 1/x \in (a, b)\}$ は

$$f^{-1}((a,b)) = \begin{cases} (b^{-1}, a^{-1}) & (a > 0 \text{ または } b < 0) \\ (b^{-1}, \infty) & (a = 0) \\ (-\infty, a^{-1}) & (b = 0) \\ (-\infty, a^{-1}) \cup (b^{-1}, \infty) & (a < 0 < b) \end{cases}$$

となる. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ の位相は $\mathbb{R}$ の通常の位相から導かれる相対位相であるから, 右辺に現れる集合はどれも開集合である. 有界開区間全体のなす集合族は $\mathbb{R}$ の通常の位相の基であるから, f の連続性が示された.

第3章　位相空間 (後半)

3.1　なぜコンパクトか、連結か ?

われわれが物事を認識したり、感じたりできる対象や範囲は常に有限なものに限られる。例え無限な対象を取り扱う場合でも、有限な対象を通してしか扱うことができない。つまり、われわれは有限という窓を通してしかその外側の世界を認識するすることができないのである。このような有限性に相当する概念を、位相空間論において一般化したものがコンパクト性と考えてよいだろう。このことは、位相空間における問題、つまり連続性と関連して現れる問題を扱う場合には、対象が元々コンパクトであるか、例えコンパクトでないにしても何らかの形でコンパクトなものに帰着できるようなものでなければ、議論の対象になり難いことになる。

例えば、離散集合のばあいには、その部分集合がコンパクトであることと有限であることは同値であるし、n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ において通常の位相を考えたときには、その部分集合がコンパクトであることと、それが有界な閉集合であることが同値である。有界な閉集合の典型的な例が有界な閉区間であることを思えば、コンパクト性は有界閉区間の一般化と考えることができる。

解析学や幾何学における大切な定理にはコンパクト性を仮定したものが多い。例えば、微積分の平均値の定理、中間値の定理、Dini の定理、Weierstrass の近似定理、Gauss-Bonnet の定理などは有界閉区間上で記述されている。定積分もまず有界閉区間上で定義し、積分区を拡張して広義積分の定義をする。われわれが高校以来何気なく計算している $\mathbb{R}$ 上の積分も、このような 2 段の手続きを経て初めて定義できているのである。

実数の加法または乗法の演算を抽象化すると群という概念が得られる。これに位相の概念とを合体させたものが位相群である。この意味で位相群は実数の一般化と見なせるので、その解析的性質を調べることが問題になる。もしこの位相群がコンパクトならば、その性質は非常に良くわかるのであるが、コンパクトでないと途端に難しくなり、未解決な問題が沢山残されている。Riemann 面に代表される一般的な局面の分類もコンパクトな場合はよくわかるがコンパクトでないと途端に難しくなるし、Atiyah-Singer の指数定理などもコンパクトな多様体に対してはよくわかっているが、コンパクトでないと途端に難しくなる。このように、コンパクト性は物事を正確に捉えるための基本的概念であることがわかる。しかし、われわれの周りにはコンパクトでないものが沢山あり、われわれの意識をコンパクトな枠組みには収めてしまうことはできない。しかし、これらの議論の細部を詰めていくと一度は何らかの有限な状況を経由せざるをえなくなるので、いずれコンパクト性がいかに大切な概念であるかが体得できるだろう。

位相空間論において、コンパクト性に続いて、よく使われる基本概念に連結性がある。解析学や幾何学において連続という概念は日常的であったが、まだ連結という概念は論じていない。世界地図を見て北アメリカと南アメリカはつながっているのだろうか。パナマ運河で切り離されているという人もいるかもしれないし、橋がかかっていてつながっているという人もいるかもしれない。それでは、開区間 $(-\infty, 0)$ と閉区間 $[0, \infty)$ の場合はどうだろうか。一般に、複数の集合がつながっていなければ、全体の様子は個々の様子を調べることに帰着され、問題が少し簡単になるので、つながっているかどうかを知ることは素朴な視点であることがわかる。例えば、関数論の解析関数は連結な開集合上で論ずるのが一般的である。このような、つながっているということを、位相を用いて最も平易に定義した概念が連結性であり、とりわけ幾何学はこの概念抜きには語れない。

3.1.1 閉区間上での連続関数の性質

==

キーワード 28

==

この章でこれから説明するコンパクト性は, 第 2 章の始めの方で説明した二分法の一般化と考えられる.

補題 3.1.1 区間 $[a,b]$ における数列 $\{x_n\}$ は収束部分列 $\{x_{n_k}\}$ をもつ。

証明 閉区間の減少列 $\{I_n\}$ を次のように帰納的に選ぶ。$I_1=[a,b]$ とする. つぎに、$I_n=[a_n,b_n]$ が決まったら、その中点で I_n を 2 等分して、数列 $\{x_n\}$ の項を無限個含む方を I_{n+1} とする。命題 **??** の議論と同様にして、両端点のなす数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ はともに $\bigcap_n I_n=\{d\}$ により決まる数 d へ収束する。そこで、各区間 I_k から数列 $\{x_n\}$ の元 x_{n_k} を１つずつ選んで、部分列 $\{x_{n_k}\}_k$ を作れば、この部分列も数 d へ収束する。■

定理 3.1.2 (最大値の定理) 閉区間上の連続関数は最大値と最小値をもつ.

証明 最大値をもつことだけを示す。最小値の場合も同様である。まず、集合 $B=\{f(x)\mid x\in[a,b]\}$ が上に有界であることを示す。もし上に有界でなければ、$f(x_n)\nearrow\infty$ を満たす列 $\{x_n\}$ が存在する。これは収束部分列 $\{x_{n_j}\}_j$ をもつので、その極限を a とすれば、f の連続性により、$f(a)=\lim_{j\to\infty}f(x_{n_j})$ となり矛盾が生じる。つぎに、集合 B の上限を c とすれば、$f(y_n)\nearrow c$ を満たす列 $\{y_n\}$ が存在する。これは収束部分列 $\{y_{n_k}\}_k$ をもつので、その極限を b とすれば、f の連続性により、$f(b)=\lim_{k\to\infty}f(y_{n_k})=c$ となる。よって、f は $x=b$ において最大値 c をもつ。■

定理 3.1.3 (中間値の定理) 閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数 f が両端点において異符号をもてば、f は零点をもつ。

証明 閉区間の減少列 $\{I_n\}$ を次のように帰納的に選ぶ. $I_1=[a,b]$ とする. つぎに、$I_n=[a_n,b_n]$ が決まったら、その中点で I_n を 2 等分して、その両端点における関数 f の値が異符号である区間を選んで I_{n+1} とする. このとき、両端点のなす数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ はともに $\bigcap_n I_n=\{d\}$ により決まる数 d へ収束する。関数 f の d における連続性により

$$\forall\,\varepsilon>0\;\exists\,\delta>0:|x-d|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(d)|<\varepsilon$$

また $I_n\subset(d-\delta,d+\delta)$ を満たす n が存在する. このとき, $a_n\le d\le b_n$ かつ $f(a_n)f(b_n)<0$ であるから,

$$\begin{aligned}|f(d)|&\le|f(d)|+|f(b_n)|\le|f(d)-f(a_n)|+|f(a_n)|+|f(b_n)|\\&=|f(d)-f(a_n)|+|f(a_n)-f(b_n)|<3\varepsilon\end{aligned}$$

ε の任意性により, d は f の零点である. ■

$\mathbb{R}$ の部分集合 D 上の関数 f が

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x, y \in D : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

を満たすとき, f は D において**一様連続**であるという. このような関数は連続である.

定理 3.1.4 有界閉区間上の連続関数は一様連続である。

証明 ■

$\mathbb{R}$ の部分集合 D 上の関数列 $\{f_n\}_n$ が

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \in \mathbb{N}\ \forall\, x \in D : n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

を満たすとき, $\{f_n\}$ は関数 f へ**一様収束**するという.

定理 3.1.5 (Dini) 有界閉区間において, 単調増加な連続関数列がある連続関数へ (各点ごとに) 収束するならば, その収束は一様収束である。

定理 3.1.6 連続関数列がある関数 f へ一様収束列すれば, f は連続である.

3.2　直積集合における位相

==

キーワード 29　弱位相、

==

復習 23　1. 直積の定義

==

第 2.5 節では, 有限個の集合の直積集合において直積位相と呼ばれる位相を考えたが, これを無限直積集合の場合へ一般化する.

$(X_i, \mathscr{T}_i)$ を位相空間とする。直積集合 $\prod_{i\in I} X_i$ から j 座標の集合 X_j への写像

$$(x_i) \mapsto x_j$$

を第 j 座標への**射影**といい、p_j で表す。つまり、$p_j((x_i)) = x_j$ である。直積空間の議論をするときには、このような射影がどれも連続であることが望ましい。そのためには、各 $i \in I$ に対して、直積集合上の集合族

$$\{p_i^{-1}(U) \mid U \in \mathscr{T}_i\}$$

はどれも開集合族でなければならない。そこで、直積集合上の位相として、これらの集合族を含む (集合の包含関係に関して) 最小の位相を考えよう。最小ということは、各射影 $p_i,\ i \in I$ を連続にする最弱位相を選んだことになる。そこで、この位相を直積集合上の**弱位相**または**直積位相**といい、この位相空間を**直積空間**という。

ここで、2 つの位相空間 $(X_1, \mathscr{T}_1)$, $(X_2, \mathscr{T}_2)$ の場合を考えてみよう。このときは、$U \in \mathscr{T}_1$, $V \in \mathscr{T}_2$ に対して、

$$p_1^{-1}(U) \cap p_2^{-1}(V) = (U \times X_2) \cap (X_1 \times V) = U \times V$$

したがって、集合族 $\{p_1^{-1}(U) \cap p_2^{-1}(V) \mid (U \in \mathscr{T}_1) \wedge (V \in \mathscr{T}_2)\}$ は第 2.5 節で述べた直積位相の位相の基になっている。

問題 85　各開集合 $U_1 \in \mathscr{T}_{i_1}, \cdots, U_n \in \mathscr{T}_{i_n}$ に対して、$p_{i_1}^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap p_{i_n}^{-1}(U_n)$ のような形の元全体は位相の基の条件を満たしていることを示せ。

ここで、命題 2.5.5 を次の問題で復習しておこう.

問題 86　$\mathbb{R}$ において通常の位相を考えたときの直積空間 $\mathbb{R}^n$ の位相は Euclid の距離

$$d((x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$$

から導かれる通常の位相と同相であることを示せ。

問題 87 円周 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^3=1\}$ では、直積空間 $\mathbb{R}^2$ の相対位相と円弧のなす集合族

$$\{(\cos\theta,\sin\theta) \mid \theta\in(a,b), a,b\in\mathbb{R}, a<b\}$$

を基にもつ位相は同相であることを示せ。

定理 3.2.1 直積空間 $\prod_{i\in I} X_i$ から j 座標の空間 X_j への射影は開写像 (開集合を開集合にうつす) である。

証明　射影を p_j, 直積空間の開集合を V とする。$z\in p_j(V)$ ならば、

$$\exists\ (x_i)\in V : p_j((x_i))=z$$

したがって、$(x_i)\in B\subset V$ を満たす基の元 B が存在する。基の元は問題 *3.10.2* の形をしているので、$p_j(B)$ は X_j の開集合である。他方、

$$z=p_j((x_i))\in p_j(B)\subset p_j(V)$$

となるから、z は $p_j(V)$ の内点である。ゆえに $p_j(V)$ は開集合である。■

3.3　分離公理

==

キーワード 30 T_0 **空間、**T_1 **空間、Hausdorff 空間、正則空間、正規空間**

==

復習 24　1.

==

集合上への位相の与え方は自明なものから離散的なものまで無数にある。このことは近さを測る尺度には用途に応じた無数の選択があるということである。これを近傍の言葉を用いて大まかに分類したものが分離公理である。

位相空間 $(X, \mathscr{T})$ の位相の強さに条件をつけることを考える。まず、X の任意な異なる 2 点 $x,\ y$ に対して、次の 3 条件を考えてみよう。

1. $(\exists\, U \in \mathscr{U}(x) : y \notin U) \vee (\exists\, V \in \mathscr{U}(y) : x \notin V)$
2. $(\exists\, U \in \mathscr{U}(x) : y \notin U) \wedge (\exists\, V \in \mathscr{U}(y) : x \notin V)$
3. $\exists\, U \in \mathscr{U}(x)\ \exists\, V \in \mathscr{U}(y) : U \cap V = \emptyset$

定義 3.3.1 位相空間 $(X, \mathscr{T})$ において、条件 1, 2, 3 をそれぞれ T_0 分離公理、T_1 分離公理、T_2 分離公理 (または Hausdorff の分離公理) という。また、これらの分離公理をみたす位相空間をそれぞれ T_0 **空間**、T_1 **空間**、T_2 **空間** (または Hausdorff **空間**) という。

条件の強さの順に並べると、

$$\text{Hausdorff空間} \Rightarrow \mathrm{T}_1\text{空間} \Rightarrow \mathrm{T}_0\text{空間}$$

問題 88 距離空間は Hausdorff 空間であることを示せ。

われわれが幾何学的描像を描きやすい位相空間は距離空間であることが多いので、Hausdorff 空間の重要性がわかるだろうが、Hausdorff 空間でない大切な位相空間も存在する。例えば、環のイデアル全体の集合で考える Jacobson による包核位相は T_0 分離公理を満たすが、一般には、Hausdorff の分離公理を満たさないことが知られている。さらに、Hausdorff の分離公理を強めた条件を考えてみよう。

4. 任意の点 x と閉集合 F が $x \notin F$ を満たせば
$$\exists\, U,\ V \in \mathscr{T} : (x \in U) \wedge (F \subset V) \wedge (U \cap V = \emptyset)$$
5. 任意の閉集合 $E,\ F$ が $E \cap F = \emptyset$ を満たせば
$$\exists\, U,\ V \in \mathscr{T} : (E \subset U) \wedge (F \subset V) \wedge (U \cap V = \emptyset)$$

定義 3.3.2 位相空間 $(X, \mathscr{T})$ において、条件 4, 5 をそれぞれ T_3 分離公理、T_4 分離公理という。また、T_0 分離公理と T_3 分離公理を満たす空間を**正則空間**、T_1 分離公理と T_4 分離公理を満たす空間を**正規空間**という。

この場合も、条件の強さの順に並べると、

$$\text{正規空間} \Rightarrow \text{正則空間} \Rightarrow \text{Hausdorff空間}$$

例題 3.3.3 例 **??** の位相空間 $(X, \mathscr{T})$ は点 2 と点 3 を分離分離できないから、T_2 分離公理は満たさない。しかし、位相 $\mathscr{T}$ の元はすべて閉集合でもあるから、1 点とそれを含まない閉集合の組は 1 と $\{2,3\}$ しかなく、このとき $\{1\}, \{2,3\}$ は開集合であるから、T_3 分離公理は満たしている。

問題 89

1. 正則空間は Hausdorff 空間であることを示せ。
2. 正規空間は正則空間であることを示せ。

距離空間では集合 A と点 x の間の距離を

$$d(A, x) = \inf\{d(x, y) \mid y \in A\}$$

で定義する。この距離を $d(x, A)$ とも表す。

問題 90 距離空間において、$d(A, x) = 0$ であるための必要十分条件は $x \in \overline{A}$ が成り立つことであることを示せ。

命題 3.3.4 距離空間は正則空間である。

証明 問題 *3.10.2* により、T_0 分離公理を満たすことがわかる。上の問題により、閉集合 F と点 $x \notin F$ に対して、$d(F, x) > 0$. $d = d(x, F)$ とすれば、開近傍 $U_{d/2}(x)$ と開集合 $\overline{U_{d/2}}^c$ は共通部分をもたず、しかもそれぞれ x と F を含んでいる。ゆえに、距離空間は T_3 分離公理も満たし正則空間である。■

ここでは次の定理の証明は与えないが、分離公理の役割の一端を知ってもらうために述べておく。

定理 3.3.5 (Urysohn) 第 2 可算公理を満たす正則空間はある距離空間と同相である。

3.4 コンパクト集合

==

キーワード 31 開被覆、コンパクト

==

復習 25 1. Hausdorff 空間、正規空間

==

位相空間 $(X, \mathscr{T})$ の部分集合 A に対して、

$$A \subset \bigcup_{U \in \mathscr{U}} U$$

を満たす $\mathscr{T}$ の部分集合族 $\mathscr{U}$ を A の**開被覆**という。

定義 3.4.1 位相空間 $(X, \mathscr{T})$ の部分集合 A が、A の任意の開被覆 $\mathscr{U}$ に対して、有限部分被覆 $\{U_1, \cdots, U_n\}$ が選べるとき、つまり

$$\exists\, U_1, \cdots, U_n \in \mathscr{U} : A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$$

が成り立つとき、A を**コンパクト**であるという。とくに、全空間 X がコンパクトな位相空間を**コンパクト空間**という。

問題 91 A, B がコンパクトならば、和集合 $A \cup B$ もコンパクトであることを示せ。

定理 3.4.2 f を位相空間 $(X, \mathscr{T}_X)$ から位相空間 $(Y, \mathscr{T}_Y)$ への連続写像とする。X の部分集合 A がコンパクトならば、Y の部分集合 $f(A)$ もコンパクトである。

証明 $f(A)$ の開被覆を $\mathscr{V}$ とする。写像 f は連続であるから、$\{f^{-1}(V) \mid V \in \mathscr{V}\}$ は A の開被覆である。仮定により、A はコンパクトであるから、有限部分被覆 $\{f^{-1}(V_i) \mid i = 1, \cdots, n\}$ が存在する。$f(f^{-1}(V_i)) = V_i \cap f(A)$ かつ

$$f(A) \subset f\left(\bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(V_i)\right) = \bigcup_{i=1}^{n} f(f^{-1}(V_i))) \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_i$$

■

定理 3.4.3 1. コンパクト集合の閉部分集合はコンパクトである。

2. Hausdorff 空間 $(X, \mathscr{T})$ では、コンパクト集合は閉集合である。

証明　1. A をコンパクト集合、B をその閉部分集合とする。B の開被覆を $\mathscr{U}$ とする。ここで $\mathscr{V} = \mathscr{U} \cup \{B^c\}$ とすれば、$\mathscr{V}$ は A の開被覆である。A はコンパクトであるから、有限部分被覆 $\{U_1, \cdots, U_n\} \cup \{B^c\}$ または $\{U_1, \cdots, U_n\}$ が存在する。ただし、$U_i \in \mathscr{U},\ i = 1, \cdots, n.$ このとき、$\{U_1, \cdots, U_n\}$ は B の有限部分被覆になっている。したがって、B はコンパクトである。

2. A をコンパクト集合とする。$x \notin A$ ならば、各 $a \in A$ に対して、$x \in U_a$, $a \in V_a$ かつ $U_a \cap V_a = \emptyset$ を満たす開集合 $U_a,\ V_a$ が存在する。このとき、$\{V_a \mid a \in A\}$ は A の開被覆である。仮定により、A はコンパクトであるから、有限部分被覆 $\{V_{a_1}, \cdots, V_{a_n}\}$ が存在する。ここで、$U = \bigcap_{i=1}^n U_{a_i}$ とすれば、U は開集合で $x \in U$ かつ

$$U \cap A \subset U \cap \left(\bigcup_{i=1}^n V_{a_i} \right) = \bigcup_{i=1}^n (U \cap V_{a_i}) = \emptyset$$

を満たすので、x は A^c の内点である。ゆえに A^c は開集合であり、したがって A は閉集合である。■

定理 3.4.4 コンパクト空間 $(X, \mathscr{T}_X)$ から Hausdorff 空間 $(Y, \mathscr{T}_Y)$ へ全単射が連続ならば、同相である。

証明　$(X, \mathscr{T}_X)$ の閉集合を F とする。$(X, \mathscr{T}_X)$ はコンパクトであるから、定理 3.10.2 により、閉集合 F はコンパクトである。f は連続であるから、定理 3.10.2 により、$f(F)$ はコンパクトである。$(Y, \mathscr{T}_Y)$ は Hausdorff 空間であるから、定理 *3.10.2* により、$f(F)$ は閉集合である。ゆえに、写像 f は同相写像である。■

定理 3.4.5 コンパクト Hausdorff 空間は正規空間である。

証明　定理 3.10.2 の証明により、コンパクト Hausdorff 空間は正則空間であることがわかった。コンパクト Hausdorff 空間で互いに共通部分をもたない 2 つの空でない閉集合を $F_1,\ F_2$ とする。定理 3.10.2 により、これらはともにコンパクトである。各 $x \in F_1$ に対して、正則性により、$x \in U_x$, $F_2 \subset V_x$ かつ $U_x \cap V_x = \emptyset$ を満たす開集合 $U_x,\ V_x$ が存在する。このとき、$\{U_x \mid x \in F_1\}$ は F_1 の開被覆である。F_1 のコンパクト性により、有限部分被覆 $\{U_{x_1}, \cdots, U_{x_n}\}$ が存在する。ここで、

$$U = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}, \quad V = \bigcap_{i=1}^n V_{x_i}$$

とすれば、U は F_1 の、V は F_2 の開被覆である。また、

$$U \cap V = \left(\bigcup_{i=1}^n U_{x_i} \right) \cap V = \bigcup_{i=1}^n (U_{x_i} \cap V) = \emptyset$$

となる。したがって、$(X, \mathscr{T})$ は正則空間である。■

第 5 日目

3.5　実数空間におけるコンパクト性

==

キーワード 32 有界閉集合、一様連続

==

復習 26　1. コンパクト

==

まずコンパクトの復習をする。位相空間 $(X, \mathscr{T})$ において集合 A がコンパクトであるとは

$$\forall\, \mathscr{U} \subset \mathscr{T} : \left(A \subset \bigcup_{U \in \mathscr{U}} U \right) \Rightarrow \left(\exists\, \mathscr{V} \subset \mathscr{U} : (\mathscr{V} \text{ 有限}) \wedge \left(A \subset \bigcup_{U \in \mathscr{V}} U \right) \right)$$

であった。

定理 3.5.1 (Heine-Borel の被覆定理) 閉区間 $[0,1]$ は $\mathbb{R}$ の通常の位相に関してコンパクトである。

証明　背理法で証明する。閉区間 $[0,1]$ がコンパクトでない仮定する。つまり、

$$\exists\, \mathscr{U} \subset \mathscr{T} : \left(A \subset \bigcup_{U \in \mathscr{U}} U \right) \wedge \left(\forall\, \mathscr{V} \subset \mathscr{U} : (\mathscr{V} \text{ 有限}) \Rightarrow \left(A \not\subset \bigcup_{U \in \mathscr{V}} U \right) \right)$$

したがって、$[0,1]$ の開被覆 $\mathscr{U}$ には、どんな有限部分被覆も $[0,1]$ を被覆できないものがある。もちろん、$\mathscr{U}$ は無限被覆である。$a_1 = 0,\ b_1 = 1$ とする。それらの中点を c_1 とすれば、$\mathscr{U}$ は 2 つの閉区間 $[a_1, c_1]$ と $[c_1, b_1]$ のいずれかに対しては無限被覆になっている。それを $[a_2, b_2]$ とする。以下、この議論を繰り返す。一般に、$\mathscr{U}$ が無限被覆になっている閉区間 $[a_k, b_k]$ の中点を c_k とすれば、$\mathscr{U}$ は 2 つの閉区間 $[a_k, c_k]$ と $[c_k, b_k]$ のいずれかに対しては無限被覆になっているので、それを $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ とする。かくして、

$$a_1 \le a_2 \le \cdots \le b_2 \le b_1, \quad b_k - a_k = \frac{1}{2^{k-1}}$$

を満たす増加列 $\{a_n\}$ と減少列 $\{b_n\}$ が得られる。したがって $a_n \to c,\ b_n \to c$ を満たす数 c が存在する。$\mathscr{U}$ は $[0,1]$ の開被覆であるから、$c \in U$ を満たす $\mathscr{U}$ の元 U が存在する。U は開集合であるから、c の ε 近傍で $(c-\varepsilon, c+\varepsilon) \subset U$ を満たすものがある。$a_n \to c$ かつ $b_n \to c$ であるから、

$$\exists\, n_0\ \forall\, n : n \ge n_0 \Rightarrow [a_n, b_n] \subset (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$$

閉区間 $[a_n, b_n]$ の決め方から、$[a_n, b_n]$ は $\mathscr{U}$ の有限部分被覆をもたないことと矛盾する。よって、$[0,1]$ はコンパクトである。■

系 3.5.2 $\mathbb{R}$ において通常の位相を考える。このとき、

1. 集合が有界閉であることとコンパクトなことは必要十分である。
2. コンパクト集合上の実数値連続関数は最大値と最小値をとる。
3. コンパクト集合上の連続関数は一様連続である。
4.

証明 ■

例題 3.5.3 (実 Hilbert 空間) n 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ を自然に無限次元へ拡張することを考えよう。$\mathbb{R}$ のコピー $\mathbb{R}_n$ の直積集合 $E = \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}_n$ において、加法と定数倍の演算を

$$(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n), \quad a(x_n) = (ax_n)$$

とすれば、E は実ベクトル空間になる。原点 $\mathbf{0}$ は全ての座標が 0 のベクトルである。つぎに、この空間の上で Euclid の距離

$$d((x_n),(y_n)) = \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|^2}$$

を考える。この場合には座標が無限にあるために、右辺の収束に気を付けなければならない。そこで、原点からの距離が有限な点 $(x_n) \in E$ だけを集めた部分集合

$$\mathscr{H} = \left\{ (x_n) \in E \mid \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2 < \infty \right\}$$

を考える。この部分集合は E の部分ベクトル空間であるだけでなく、上の距離により完備な距離空間になっている。この空間では、単位球 $\{(x_n) \mid d((x_n),\mathbf{0}) \leq 1\}$ は有界閉集合ではあるがコンパクトではない。

問題 92

1. 次の Schwarz の不等式を示せ。

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n y_n\right)^2 \leq \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n^2\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} y_n^2\right)$$

2. 上の例の部分集合 $\mathscr{H}$ が実ベクトル空間であることを示せ。
3. 上の例で、$\mathscr{H}$ における距離は三角不等式を満たすことを示せ。
4. 上の例で、空間 $\mathscr{H}$ は完備であることを示せ。
5. 上の例で、$\mathscr{H}$ の単位球がコンパクトではないことを示せ。

3.6 コンパクト集合–その 2

==

キーワード 33 有限交叉性

==

復習 27 1. コンパクト

==

位相空間 $(X, \mathscr{T})$ において、開集合族 $\mathscr{T}$ と閉集合族 $\mathscr{F}$ の関係は

$$\mathscr{F} = \{F \mid F^c \in \mathscr{T}\}, \quad \mathscr{T} = \{U \mid U^c \in \mathscr{F}\}$$

となっている。ここではコンパクト性の定義を閉集合を用いて書き直すために、$\mathscr{U} \in \mathscr{T}, \mathscr{V} \in \mathscr{T}$ に対応する閉集合族

$$\mathscr{E} = \{F \mid F^c \in \mathscr{U}\}, \quad \mathscr{D} = \{F \mid F^c \in \mathscr{V}\}$$

を導入して、コンパクト集合の定義をそのまま書き換えると、任意の $\mathscr{E} \subset \mathscr{F}$ に対して

$$\left(\bigcap_{F \in \mathscr{E}} F \subset A^c\right) \Rightarrow \left(\exists\, \mathscr{D} \subset \mathscr{E} : (\mathscr{D} \text{ 有限}) \wedge \left(\bigcap_{F \in \mathscr{D}} F \subset A^c\right)\right)$$

ここで、$B \subset A^c$ と書かれている部分を $B \cap A = \emptyset$ と書き直してから、対偶を考えると

$$\left(\forall\, \mathscr{D} \subset \mathscr{E} : (\mathscr{D} \text{ 有限}) \wedge \left(\bigcap_{F \in \mathscr{D}} F \cap A \neq \emptyset\right)\right) \Rightarrow \left(\bigcap_{F \in \mathscr{E}} F \cap A \neq \emptyset\right)$$

この左側の部分が成り立つとき、つまり $\mathscr{E}$ の任意の有限部分集合族 $\mathscr{D}$ のすべての元と集合 A との共通部分が空でないとき、閉集合族 $\mathscr{E}$ は A において**有限交叉性**をもつという。以上をまとめると、

定理 3.6.1 位相空間 $(X, \mathscr{T})$ において、集合 A がコンパクトであるための必要十分条件は、A において有限交叉性をもつ閉集合族はどれも空でない共通部分をもつことである。

コンパクト性に関してよく利用されるもう 1 つの条件を述べておこう。

定理 3.6.2 位相空間 $(X, \mathscr{T})$ において、集合 A がコンパクトであるための必要十分条件は、 A における任意の有向系が A の元に収束する部分有向系をもつことである。

証明　必要性。A はコンパクトであるとする。A における有向系を $\{a_i\}_{i\in I}$ とする。各 $j \in I$ に対して、F_j を集合 $\{a_i \mid j \prec i\}$ の閉包とすれば、集合族 $\{F_j \mid j \in I\}$ は A において有限交叉性をもつ閉集合族である。A はコンパクトであるから、この集合族の共通部分と A の共通部分は空ではない。その元の 1 つを a とすれば、この点は集合 $\{a_i \mid i \in I\}$ の閉包の点でもある。実際、もし閉包の点でなければ、

$$\exists\, U \in \mathscr{U}(a) : U \cap \{a_i \mid i \in I\} = \emptyset$$

したがって、$a \in F_j$ と矛盾する。

十分性。A の任意の有向系が A の元に収束とする部分有向系をもつとする。A において有限交叉性をもつ閉集合族を $\mathscr{E}$ とする。$\mathscr{E}$ の有限個の元の共通部分全体のなす閉集合族を $\mathscr{D}$ とすれば、$\mathscr{D}$ も A において有限交叉性をもち、$\mathscr{E} \subset \mathscr{D}$. しかも、$\mathscr{D}$ は集合の包含関係と逆向きの順序に関して有向集合である。そこで、選択公理を用いて、$\mathscr{D}$ の各元 F と A の共通部分から一斉に元 $a_F \in F \cap A$ を選んで、集合 $\{a_F \mid F \in \mathscr{D}\}$ をつくる。この集合は A における有向系であるから、仮定により、A のある元 a に収束とする部分有向系が存在する。$F \subset E$ ならば、$a_F \in E$ でもあるから、各 $E \in \mathscr{D}$ に対して

$$\forall\, F \in \mathscr{D} : F \subset E \Rightarrow a_F \in E$$

が成り立ち、$a \in E$. したがって、$\mathscr{D}$ の共通部分と A との共通部分は空ではない。したがって、$\mathscr{E}$ の共通部分と A との共通部分も空ではない。よって、A はコンパクトである。■

3.7 コンパクト集合–その３：Tychonoff の定理

==

キーワード 34 Tychonoff **の定理**

==

復習 28 1. Zorn の補題

2. コンパクトの定義

3. 有限交叉性

==

定理 3.7.1 (Tychonoff) コンパクト空間 $(X_i, \mathscr{T}_i)$, $i \in I$ の直積空間 $\prod_{i \in I} X_i$ は弱位相に関してコンパクトである。

証明 直積空間 $\prod_{i\in I} X_i$ を X とする。X において有限交叉性をもつ閉集合族を $\mathscr{F}$ とする。X の部分集合のなす集合族で、$\mathscr{F}$ を含み、しかも有限交叉性をもつ集合族の全体を $\mathfrak{X}$ とする。$\mathfrak{X}$ は集合族の間の包含関係に関して順序集合になる。$\mathfrak{X}$ の全順序部分集合を $\mathfrak{Y}$ とする。このとき、集合族 $\bigcup_{\mathscr{E}\in\mathfrak{Y}} \mathscr{E}$ は $\mathscr{F}$ を含み有限交叉性をもつので、$\mathfrak{Y}$ の $\mathfrak{X}$ における上界である。したがって、Zorn の補題により、$\mathfrak{X}$ は極大元 $\mathscr{M}$ をもつ。この集合族 $\mathscr{M}$ は極大性により

1. $M_1, \cdots, M_n \in \mathscr{M} \Rightarrow M_1 \cap \cdots \cap M_n \in \mathscr{M}$
2. $\forall\ M \in \mathscr{M} : A \cap M \neq \emptyset \Rightarrow A \in \mathscr{M}$

を満たしている。X から X_j への射影を p_j とする。このとき、集合族 $\{\overline{p_j(M)} \mid M \in \mathscr{M}\}$ は有限交叉性をもつので、X_j のコンパクト性により、それらの共通部分は空ではない。そこで、その元の１つを x_j とする。この選び方により、

$$\forall\ M \in \mathscr{M}\ \forall\ U_j \in \mathscr{U}(x_j) : U_j \cap p_j(M) \neq \emptyset$$

このとき、$p_j^{-1}(U_j) \cap M \neq \emptyset$ が任意の $M \in \mathscr{M}$ に対して成り立つので、$\mathscr{M}$ の性質２により、$p_j^{-1}(U_j) \in \mathscr{M}$ が任意の $U_j \in \mathscr{U}(x_j)$ に対して成り立つ。ここで、$x = (x_j) \in X$ とすれば、弱位相の定義により、

$$\forall\ U \in \mathscr{U}(x)\ \exists\ i_1, \cdots, i_n \in I : x \in p_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \cdots \cap p_{i_n}^{-1}(U_{i_n}) \subset U$$

$\mathscr{M}$ の性質１により、$p_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \cdots \cap p_{i_n}^{-1}(U_{i_n}) \in \mathscr{M}$ となるから、$U \in \mathscr{M}$. ゆえに、任意の $F \in \mathscr{F}$ に対して、$U \cap F \neq \emptyset$ となり、$x \in \overline{F} = F$ が示されたことになる。■

定理 3.7.2 $\mathscr{M}$ の n 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ において通常の位相を考える。このとき、部分集合がコンパクトなことと有界閉なことは必要十分条件である。

証明　必要性。A を $\mathbb{R}^n$ のコンパクト部分集合とする。Euclid 空間は Hausdorff 空間であるから、A は閉集合である。また、A はコンパクトであるから、半径 1 の有限個の近傍で被覆することができるので、有界である。

十分性。A を $\mathbb{R}^n$ の有界閉集合とする。$\mathbb{R}^n$ から第 i 座標への射影を p_i とし、$A_i = p_i(A)$ とおく。各 i に対して、A_i は $\mathbb{R}$ の有界部分集合であるから、その閉包はコンパクトである。また、$A \subset \prod_{i=1}^n \overline{A_i}$ とあらわせるので、A はコンパクト集合の閉部分集合である。ゆえに、定理 3.10.2 により、A はコンパクトである。■

例題 3.7.3 $X = \mathbb{R} \times \{0, 1\}$ とし、写像 $f : X \to \mathbb{R}$ を $f(x, i) = x,\ i = 0, 1$ とする。値域の $\mathbb{R}$ では自然な位相を、X では f を連続にする最弱位相 $\mathscr{T}$ を考える。このとき、位相空間 $(X, \mathscr{T})$ は Hausdorff の分離公理を満たさない。ここで、X の部分集合を

$$A = [0, 1] \times \{0\} \cup (0, 1) \times \{1\}, \quad B = (0, 1) \times \{0\} \cup [0, 1] \times \{1\}$$

とすれば、これらはともにコンパクトではあるが、共通部分 $A \cap B = (0, 1) \times \{0, 1\}$ はコンパクトではない。

例 3.10.2 で示したように、無限次元の

3.8　局所コンパクト空間

==

キーワード 35 局所コンパクト空間、１点コンパクト化

==

復習 29　1. コンパクト

==

実数空間の場合に、有界閉区間はコンパクトであったが、有界でない実数全体はコンパクトではなかった。そこで、このような空間を含む概念を導入したい。

定義 3.8.1 位相空間の各点にコンパクトな近傍が存在するとき、その位相空間を**局所コンパクト**という。

当然この空間では各点に閉包がコンパクトな開近傍が存在する。

問題 93 実数の集合は通常の位相に関して局所コンパクトであることを示せ。

定理 3.8.2 (Alexandroff) 位相空間 $(X, \mathscr{T})$ に新たな点 ω を付け加えた集合を $\widetilde{X} = X \cup \{\omega\}$ とする。このとき、集合族

$$\widetilde{\mathscr{T}} = \{U \mid (U \cap X \in \mathscr{T}) \vee (\omega \in U \Rightarrow X \setminus U \text{ はコンパクト閉集合})\}$$

は $\widetilde{X}$ 上の位相であり、$(\widetilde{X}, \widetilde{\mathscr{T}})$ はコンパクト空間になる。とくに、X が局所コンパクト Hausdorff 空間であるための必要十分条件は $\widetilde{X}$ がコンパクト Hausdorff 空間になることである。

証明　$\emptyset \in \mathscr{T}$ かつ $\widetilde{X} \setminus \widetilde{X} = \emptyset$ がコンパクト閉なことから、$\emptyset, \widetilde{X} \in \widetilde{\mathscr{T}}$ は明らかである。つぎに、$U, V \in \widetilde{\mathscr{T}}$ とする。一般に、$\widetilde{X} \setminus W$ がコンパクト閉集合ならば、$W = W' \cup \{\omega\}$ を満たす開集合 $W' \in \mathscr{T}$ (で補集合がコンパクトなもの) が存在する。したがって、U または V が $\mathscr{T}$ の元ならば、$U \cap V \in \mathscr{T}$ となるので、$U \cap V \in \widetilde{\mathscr{T}}$. また、$\widetilde{X} \setminus U$ と $\widetilde{X} \setminus V$ がともにコンパクト閉集合ならば、$\widetilde{X} \setminus (U \cap V) = (\widetilde{X} \setminus U) \cup (\widetilde{X} \setminus V)$ もコンパクト閉集合になるので、$U \cap V \in \widetilde{\mathscr{T}}$. 最後に、$U_i \in \widetilde{\mathscr{T}}$, $i \in I$ とする。すべての U_i が $\mathscr{T}$ の元ならば、$\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathscr{T}$ となる。そうでない場合には、$\bigcup_{i \in I} U_i$ は開集合 U_i' を用いて $(\bigcup_{i \in I} U_i') \cup \{\omega\}$ と表せる。ただし、どれかの U_i' の補集合はコンパクトである。したがって、閉集合 $\widetilde{X} \setminus (\bigcup_{i \in I} U_i') = \bigcap_{i \in I} \widetilde{X} \setminus U_i'$ はコンパクト集合の部分集合であるからコンパクトである。よって、$\bigcup_{i \in I} U_i \in \widetilde{\mathscr{T}}$ となり、$\widetilde{\mathscr{T}}$ は $\widetilde{X}$ の位相である。

$\widetilde{X}$ の開被覆 $\mathscr{U}$ の元のうち ω を含むものを U とすれば、$\widetilde{X} \setminus U$ はコンパクト閉集合になる。したがって、その有限部分被覆を考えることにより、$\widetilde{X}$ がコンパクトなことがわかる。

X が局所コンパクト Hausdorff 空間ならば、$\widetilde{X}$ の部分集合 X において Hausdorff の分離公理が成り立つことは明らかである。次に局所コンパクト性を使う

と、各 $x \in X$ に対して、その開近傍 U で $\overline{U}$ がコンパクトなものが存在するので、$\widetilde{X} \setminus \overline{U} \in \widetilde{\mathscr{T}}$ となり、x と ω も分離されることがわかり、$\widetilde{X}$ はコンパクト Hausdorff 空間である。逆に、$\widetilde{X}$ がコンパクト Hausdorff 空間ならば、X が局所コンパクトで、Hausdorff の分離公理を満たすことも明らかである。■

上のようなコンパクト空間の作り方を**1 点コンパクト化**または **Alexandroff のコンパクト化**という。

問題 94 実数空間 $\mathbb{R}$ の 1 点コンパクト化は円周 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ と同相であることを示せ。

問題 95 直積空間 $\mathbb{R}^2$ の 1 点コンパクト化は球面 $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ と同相であることを示せ。ただし、球面の位相は直積空間 $\mathbb{R}^3$ の相対位相である。

3.9　連結性

==

キーワード 36　連結、連結成分、

==

復習 30　　1.

==

定義 3.9.1 位相空間 $(X, \mathscr{T})$ が

$$\neg(\exists\, U,\ V \in \mathscr{T} \setminus \{\emptyset\} : (U \cap V = \emptyset) \wedge (X = U \cup V))$$

を満たすとき、X は**連結**であるという。X の部分集合 A が相対位相に関して連結のとき、A は連結であるという。

　空でない２つの集合が $U \cap V = \emptyset$ と $U \cup V = X$ を満たせば、$U,\ V$ はともに開かつ閉な集合である。

定理 3.9.2 $\mathbb{R}$ で通常の位相を考えたとき、その部分集合が連結であるための必要十分条件はその集合が区間であることである。

証明　十分性。区間 I が連結でなかったとすれば、相対位相に関して空でない開集合で互いに共通部分をもたない $A,\ B$ を用いて $I = A \cup B$ と表せる。I 上の関数 f を A 上では 0, B 上では 1 と定めると、f は連続関数である。$a,\ b$ をそれぞれ $A,\ B$ の元とする。$a \neq b$ であるから、まず $a < b$ とする。集合 $B \cap [a, b]$ の下限を c とすれば、c に収束する $B \cap [a, b]$ の列 $\{b_n\}$ が存在する。f は連続であるから、$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) = 1$. $f(a) \neq f(c)$ であるから、$a < c$. 他方、c に収束する $[a, c)$ の列 $\{a_n\}$ が存在する。ゆえに、$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = 0$ となり矛盾する。$a > b$ の場合も同様である。

　必要性。集合 A が連結であるとする。A に対して

$$a = \begin{cases} \inf A & (A \text{ は下に有界}) \\ -\infty & \text{その他} \end{cases}, \quad b = \begin{cases} \sup A & (A \text{ は上に有界}) \\ \infty & \text{その他} \end{cases}$$

とすれば、$(a, b) \subset A \subset [a, b]$. 実際、最初の包含関係が成り立たなければ、$(a, b)$ の元 c で $c \notin A$ を満たすものがあるので、

$$A = ((-\infty, c) \cap A) \cup ((c, \infty) \cap A)$$

となり、A が連結であることと矛盾する。右の包含関係は明らかである。よって、A は区間である。■

定義 3.9.3 位相空間 $(X, \mathscr{T})$ において、集合の包含関係に関して極大な連結部分集合を**連結成分**という。

命題 3.9.4 位相空間 $(X, \mathscr{T})$ において、

1. 連結部分集合の閉包はまた連結である。
2. 連結成分は閉集合である。

証明　1. 部分集合 A は連結であるとする。もし $\overline{A}$ が共通部分をもたない 2 つの $\overline{A}$ における開かつ閉な集合 $B,\ C$ の和集合として表せたとする。このとき、$A \cap B$ と $A \cap C$ は共通部分をもたない A における開かつ閉な集合で A はそれらの和集合になっている。A は連結であるから、このいずれかは空集合である。例えば、$A \cap B = \emptyset$ とすれば、$A \subset C$ となる。C は $\overline{A}$ における閉集合であるから、$\overline{A} = C$ となり、$B = \emptyset$. ゆえに、A の閉包は連結である。同様な議論が $A \cap C = \emptyset$ の場合にもできる。

2. 連結成分を A とすれば、その閉包も連結であるが、連結成分は集合の包含関係に関して極大であるから、それらは一致しなければならない。■

例題 3.9.5 $\mathbb{R}$ において通常の位相を考える。このとき、集合 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ の連結成分には、例えば、区間 $(0, 1)$ が考えられる。また集合 $\mathbb{Q}$ では各点が連結成分である。このように、各連結成分が 1 点からなる集合を**全不連結**という。

定理 3.9.6

1. f を位相空間 $(X, \mathscr{T})$ から位相空間 $(Y, \mathscr{T}')$ への連続写像とする。A が X の連結集合ならば、$f(A)$ は Y の連結集合である。
2. f を位相空間 $(X, \mathscr{T})$ から $\mathbb{R}$ への連続写像とする。$a,\ b \in f(\mathbb{R})$ が $a < b$ を満たせば、任意の $c \in (a, b)$ に対して、$f(x) = c$ を満たす x が存在する。

3.10　ノルム空間

==

キーワード 37 ノルム空間

==

復習 31　1. 距離空間

==

集合 E に加法と定数倍の演算

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \quad c\boldsymbol{x}, \ (c \in \mathbb{C})$$

が与えられたものを、**複素ベクトル空間**という。定数倍の演算が複素数ではなく実数の場合には、**実ベクトル空間**という。E の部分集合 F が上の 2 つの演算で閉じているとき、**部分空間**という。

つぎに、ベクトルの大きさを与える概念を導入しよう。

定義 3.10.1 複素ベクトル空間 E 上に、任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E$ と任意の $c \in \mathbb{C}$ に対して

1. $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$ かつ $\|\boldsymbol{x}\| = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{x} = 0$
2. $\|c\boldsymbol{x}\| = |c|\|\boldsymbol{x}\|$
3. $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$

を満たす写像 $\| \quad \| : E \mapsto \mathbb{R}_+$ をノルムという。このようなノルムの与えられたベクトル空間を**ノルム空間**といい、$(E, \| \quad \|)$ で表す。

ノルム空間 $(E, \| \quad \|)$ の部分空間上では、とくに断らない限り E のノルムを使い、部分ノルム空間という。

1 次元複素ベクトル空間 $\mathbb{C}$ では絶対値がノルムを与えている。

問題 96　1. 次のベクトル空間はノルム空間であることを示せ。

a. 実ベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ において、

$$\|\boldsymbol{x}\| = |x_1| + |x_2|, \quad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$$

b. $m \times n$ 複素行列の全体のなすベクトル空間 $M_{m,n}(\mathbb{C})$ において

$$\|A\| = \sup\{\|A\boldsymbol{x}\| \mid \|\boldsymbol{x}\| = 1\}$$

c. 閉区間 $[0,1]$ 上の複素数値連続関数全体のなすベクトル空間 $C([0,1])$ において、

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| \mid x \in [0,1]\}$$

2. 閉区間 $[0,1]$ 上の Riemann 積分可能な関数の全体 $\mathcal{L}^1([0,1])$ は各点ごとの和と定数倍に関して実、または複素ベクトル空間である。このとき、

$$\|f\| = \int_0^1 |f(x)|dx$$

はノルムのどの条件を満たさないか指摘せよ。

問題 97 ノルム空間 $(E, \|\ \ \|)$ において、

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$$

とすれば、(E, d) は距離空間であることを示せ。

この距離から導かれる位相を**ノルム位相**ともいう。

問題 98 ノルム空間 $((E, \|\ \ \|)$ において、

1. $|\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\|| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ を示せ。
2. 写像 $\boldsymbol{x} \in E \mapsto \|\boldsymbol{x}\| \in \mathbb{R}$ は連続であることを示せ。
3. 写像 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in E \times E \mapsto \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in E$ は連続であることを示せ。
4. 写像 $(\lambda, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{C} \times E \mapsto \lambda\boldsymbol{x} \in E$ は連続であることを示せ。

例題 3.10.2 1. 数列全体のなす集合は、加法と定数倍の演算を

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}, \quad c\{a_n\} = \{ca_n\}$$

とすると、ベクトル空間になる。数列 $\{a_n\}$ が

$$\exists\ \lambda > 0\ \forall\ n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq \lambda$$

を満たすとき、**有界**という。有界な数列の全体はノルム

$$\|\{a_n\}\|_\infty = \sup\{|a_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$$

に関してノルム空間であり、l^∞ と表される。

2. l^∞ の部分空間を幾つか挙げる。

$$c = \{\{a_n\} \mid \text{収束列}\}, \quad \|\ \ \|_\infty$$

$$c_0 = \{\{a_n\} \mid a_n \to 0\}, \quad \|\ \ \|_\infty$$

$$l^1 = \left\{\{a_n\} \mid \sum_{n=1}^\infty |a_n| < \infty\right\}, \quad \|\{a_n\}\|_1 = \sum_{n=1}^\infty |a_n|$$

$$l^2 = \left\{\{a_n\} \mid \sum_{n=1}^\infty |a_n|^2 < \infty\right\}, \quad \|\{a_n\}\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^\infty |a_n|^2}$$

3.11 線形写像

==

キーワード 38 線形写像、有界性、汎関数

==

復習 32 1. ノルム空間

==

行列の概念を無限次元のベクトル空間の場合へも一般化する。

定義 3.11.1 ノルム空間 $(E, \| \ \|_E)$ からノルム空間 $(F, \| \ \|_F)$ への写像 A が E の任意の元 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ と任意の複素数 c, d に対して、

$$A(c\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{y}) = cA\boldsymbol{x} + dA\boldsymbol{y}$$

を満たすとき、**線形**であるという。

線形写像は E の部分空間を F の部分空間の上に移す。
線形写像 A に対して

$$\forall\ \boldsymbol{x} \in E : \|A\boldsymbol{x}\|_F \leq \lambda \|\boldsymbol{x}\|_E$$

を満たす非負な数 λ が存在するとき、A は有界であるといい、このような λ の下限を $\|A\|$ で表す。定義よりただちに、

$$\forall\ \boldsymbol{x} \in E : \|A\boldsymbol{x}\|_F \leq \|A\| \|\boldsymbol{x}\|_E$$

以後、有界な線形写像の全体を $\mathcal{L}(E, F)$ で表す。$E = F$ の場合には、$\mathcal{L}(E)$ と表す。とくに、F が $\mathbb{C}$ または $\mathbb{R}$ の場合の線形写像を**線形汎関数**といい、有界線形汎関数全体のなす空間を E の**双対 (そうつい) 空間**という。双対空間は E^* で表されることが多い。

ノルムの添え字は必要がなければ省くことが多い。

問題 99 集合 $\mathcal{L}(E, F)$ は次の加法、定数倍、ノルム

$$(A + B)\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{x}, \quad (cA)\boldsymbol{x} = c(A\boldsymbol{x}), \quad \|A\|$$

によりノルム空間であることを示せ。。

命題 3.11.2 A をノルム空間 $(E, \| \ \|_E)$ からノルム空間 $(F, \| \ \|_F)$ への線形写像とする。

1. 写像 A がノルムから導かれる位相に関して連続であるための必要十分条件は A が有界なことである。

2. $\|A\| = \sup\{\|A\boldsymbol{x}\|_F \mid \|\boldsymbol{x}\|_E \leq 1\}$

証明　1. 十分性は明らかであるから、必要性だけを示す。A が連続ならば、

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, \boldsymbol{x} \in E\ \forall\, \boldsymbol{y} \in E : \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_E < \delta \Rightarrow \|A\boldsymbol{x} - A\boldsymbol{y}\|_F < \varepsilon$$

よって、$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$ とすれば、A の線形性により、

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, \boldsymbol{z} \in E : \|\boldsymbol{z}\|_E < \delta \Rightarrow \|A\boldsymbol{z}\|_F < \varepsilon$$

そこで、$\boldsymbol{z} \neq 0$ の場合に、$\delta' \in (0, \delta)$ を用いて、$\boldsymbol{z}' = (\delta'/\|\boldsymbol{z}\|_E)\boldsymbol{z}$ とすれば、$\|\boldsymbol{z}'\|_E < \delta$ を満たすので、$\|A\boldsymbol{z}'\|_F < \varepsilon$. ゆえに、$\|A\boldsymbol{z}\|_F \leq (\varepsilon/\delta')\|\boldsymbol{z}\|_E$. $\boldsymbol{z} = 0$ の場合もこの不等式を満たすので、A は有界である。

2. 右辺を $|||A|||$ とする。A のノルムの定義より、$\|A\boldsymbol{x}\|_F \leq \|A\|\|\boldsymbol{x}\|_E$. ゆえに、

$$|||A||| = \sup\{\|A\boldsymbol{x}\|_F \mid \|\boldsymbol{x}\|_E = 1\} = \sup\left\{\frac{\|A\boldsymbol{x}\|_F}{\|\boldsymbol{x}\|_E} \mid \boldsymbol{x} \in E\right\} \leq \|A\|$$

また、$|||A|||$ の定義より、$\|A\boldsymbol{x}\|_F \leq |||A|||\|\boldsymbol{x}\|_E$. ゆえに、$\|A\| \leq |||A|||$. ■

例題 3.11.3 $[0, 1]$ 上で 1 回連続微分可能な実数値関数の全体を $C^1([0, 1])$ で表す。これは関数の各点ごとの和と定数倍によりベクトル空間にな、問題 **??**, 1.c のノルム空間 $C([0, 1])$ の部分ノルム空間である。このとき、

$$Df = f'$$

とすれば、D は $C^1([0, 1])$ から $C([0, 1])$ への線形写像であるであるが有界ではない。ところが、部分空間 $C^1([0, 1])$ におけるノルムを

$$|||f||| = \sqrt{\|f\|^2 + \|f'\|^2}$$

とすれば、D は有界な線形写像になる。

例題 3.11.4 収束列の空間 c において、写像 $f : \{a_n\} \in c \mapsto \lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$ は線形写像である。

3.12 Banach 空間

==

キーワード 39 Banach 空間

==

復習 33 1. ノルム空間、双対空間

==

定義 3.12.1 ノルム空間が完備のとき、**Banach 空間**という。

問題 100 第 10 節の問題 3.10.2 や 例 3.10.2 で挙げたノルム空間はすべて Banach 空間であることを示せ。

命題 3.12.2 ノルム空間 $\mathcal{L}(E,F)$ において、F が Banach 空間ならば、$\mathcal{L}(E,F)$ も Banach 空間である。

証明 $\mathcal{L}(E,F)$ における Cauchy 列を $\{A_n\}$ とすれば、

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n,m \in \mathbb{N} : n,m \geq n_0 \Rightarrow \|A_n - A_m\| < \varepsilon$$

各 $\boldsymbol{x} \in E$ に対して、$\|A_n\boldsymbol{x} - A_m\boldsymbol{x}\| \leq \|A_n - A_m\|\|\boldsymbol{x}\|$ が成り立つので、$\{A_n\boldsymbol{x}\}$ は F における Cauchy 列である。仮定により、F は完備であるから、この Cauchy 列は極限 $\boldsymbol{y} \in F$ をもつ。つまり、

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow \|A_n\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \leq \varepsilon\|\boldsymbol{x}\| \tag{3.1}$$

このとき得られた写像 $\boldsymbol{x} \in E \mapsto \boldsymbol{y} \in F$ を A とする。つまり、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ とした。各 A_n の線形性 $A_n(c\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x}') = cA_n\boldsymbol{x} + dA_n\boldsymbol{x}'$ から A の線形性がわかる。また、$\{A_n\}$ が Cauchy 列であるから、$\{\|A_n\|\}$ も正数の Cauchy 列である。したがって、$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\| \leq \lambda$ を満たす正数 λ が存在する。ゆえに、任意の $n \geq n_0$ に対して、

$$\|A\boldsymbol{x}\| \leq \|(A - A_n)\boldsymbol{x}\| + \|A_n\boldsymbol{x}\| \leq (\varepsilon + \lambda)\|\boldsymbol{x}\|$$

となるので、A は有界線形写像つまり $\mathcal{L}(E,F)$ の元である。ゆえに、(3.1) により、

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow \|A_n - A\| \leq \varepsilon$$

よって、$\mathcal{L}(E,F)$ は Banach 空間である。■

系 3.12.3 ノルム空間の双対空間は Banach 空間である。

定理 3.12.4 Banach 空間 E の単位球 $\{\boldsymbol{x} \in E \mid \|\boldsymbol{x}\| \leq 1\}$ がコンパクトであるための必要十分条件は E が有限次元なことである。

証明　十分性は定理 3.7.2 による。必要性を示す。E の単位球 B がコンパクトならば、$B \subset \bigcup_{i=1}^{n}((1/2)B + \boldsymbol{x}_i)$ を満たす元 $\boldsymbol{x}_i \in E$ が存在する。$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ の生成する部分空間 F は有限次元である。しかも

$$B \subset \frac{1}{2}B + F \subset \frac{1}{2}(\frac{1}{2}B + F) + F = \frac{1}{2^2}B + F \subset \cdots \subset \frac{1}{2^m}B + F$$

ゆえに、$B \subset \overline{F} = F$. よって、$E = \bigcup_{m=1}^{\infty} mB \subset F$. ■

ノルム空間 E の双対空間 E^* において、E の任意有限個の元 $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ に対して定まる E^* の部分集合

$$U(f; \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = \{g \in E^* \mid |(g - f)(\boldsymbol{x}_i)| \leq 1 \ (i = 1, \cdots, n)\}$$

のなす集合族 $\mathcal{U}(f) = \{U(f; \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n) \mid \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n \in E\}$ は $f \in E^*$ における基本近傍系になるので、これから導かれる E^* の位相を**弱 * 位相**という。

定理 3.12.5 ノルム空間 E の双対空間 E^* の単位球は弱 * 位相に関してコンパクトである。

証明　双対空間 E^* の単位球を B とする。直積集合 $\prod_{\boldsymbol{x} \in E} \mathbb{C}_{\boldsymbol{x}}$ $(\mathbb{C}_{\boldsymbol{x}} = \mathbb{C})$ において、$\mathbb{C}$ の通常の位相から導かれる直積位相を考える。$D_{\boldsymbol{x}} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \|\boldsymbol{x}\|\}$ は $\mathbb{C}$ のコンパクト部分集合であるから、Tychonoff の定理により、$\prod_{\boldsymbol{x} \in E} D_{\boldsymbol{x}}$ は $\prod_{\boldsymbol{x} \in E} \mathbb{C}_{\boldsymbol{x}}$ のコンパクトな部分集合である。ここで、写像

$$\pi : f \in E^* \mapsto (f(\boldsymbol{x}))_{\boldsymbol{x} \in E} \in \prod_{\boldsymbol{x} \in E} \mathbb{C}_{\boldsymbol{x}}$$

を考える。このとき、この写像は単射であるし、直積位相を $\pi(E^*)$ へ制限して得られる相対位相は E^* の弱 * 位相と同相である。また、$\pi(B) \subset \prod_{\boldsymbol{x} \in E} D_{\boldsymbol{x}}$ は明らかであるから、もし $\pi(B)$ が閉部分集合であれば、B は弱 * コンパクトなことがわかる。

いま、$h = (h_{\boldsymbol{x}})$ を $\pi(B)$ の閉包の元とすれば、B の有向系 $\{f_i\}_{i \in I}$ で直積位相に関して、$\pi(f_i) \to h$ となるもの、つまり $\forall\, \boldsymbol{x} \in E : (f_i(\boldsymbol{x})) \to h_{\boldsymbol{x}}$ を満たすものがある。このとき、任意の $c, d \in \mathbb{C}$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E$ に対して

$$f_i(c\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{y}) = cf_i(\boldsymbol{x}) + df_i(\boldsymbol{y}), \quad |f_i(\boldsymbol{x})| \leq \|\boldsymbol{x}\|$$

が成り立つので、

$$h_{c\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{y}} = ch_{\boldsymbol{x}} + dh_{\boldsymbol{y}}, \quad |h_{\boldsymbol{x}}| \leq \|\boldsymbol{x}\|$$

ここで、$f(\boldsymbol{x}) = h_{\boldsymbol{x}}$ とすれば、f は E^* の単位球の元である。ゆえに、

$$h = (h_{\boldsymbol{x}})_{\boldsymbol{x} \in E} = (f(\boldsymbol{x}))_{\boldsymbol{x} \in E} \in \pi(B)$$

■

命題 3.12.6
1. Banach 空間 c_0 の双対空間から Banach 空間 l^1 へのノルムを保存する (等長) 全単射線形 (同型) 写像が存在する。

2. Banach 空間 l^1 の双対空間から Banach 空間 l^∞ への等長同型写像が存在する。

証明 1. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して、数列 $\{\delta_{nm}\}_m$ を e_n とすれば、$e_n \in c_0$ かつ $\|e_n\|_\infty = 1$. c_0 の双対空間の元 f に対して、$b_n = f(e_n)$ とおけば、数列 $\{b_n\}$ が得られる。$b_n = z_n|b_n|$, $|z_n| = 1$ により、z_n を定めれば、任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して

$$\sum_{n=1}^{m} |b_n| = f\left(\sum_{n=1}^{m} \overline{z_n} e_n\right) \leq \|f\| \left\|\sum_{n=1}^{m} \overline{z_n} e_n\right\|_\infty = \|f\|$$

左辺は単調増加で上に有界であるから、$\{b_n\} \in l^1$. よって、c_0 の双対空間から l^1 への写像 $f \mapsto \{b_n\}$ が得られる。また、c_0 の任意の元 $\{c_n\}$ に対して、

$$|f(\{c_n\})| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} c_n f(e_n)\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| z_n c_n\right| \leq \|\{b_n\}\|_1 \|\{c_n\}\|_\infty$$

となるので、$\|f\| \leq \|\{b_n\}\|_1$. ゆえに、$\|f\| = \|\{b_n\}\|_1$ となり、写像 $f \mapsto \{b_n\}$ は等長単射である。また、l^1 の任意の元 $\|\{b_n\}\|_1$ に対して、$f(\{c_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n c_n$ とすれば、

$$|f(\{c_n\})| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |b_n||c_n| \leq \|\{b_n\}\|_1 \|\{c_n\}\|_\infty, \quad (\{c_n\} \in c_0)$$

が成り立ち、f は c_0 の双対空間の元であり、上の写像により $f \mapsto \{c_n\}$ となるので、この写像は全射である。

2. 1 で定義した e_n は $e_n \in l^1$ かつ $\|e_n\|_1 = 1$ を満たしている。l^1 の双対空間の元 g に対して、$c_n = g(e_n)$ とすれば、数列 $\{c_n\}$ が得られる。$|c_n| = |g(e_n)| \leq \|g\|\|e_n\| = \|g\|$ が成り立つので、$\{c_n\} \in l^\infty$ かつ $\|\{c_n\}\|_\infty \leq \|g\|$. よって、$l^1$ の双対空間から l^∞ への写像 $g \mapsto \{c_n\}$ が得られた。また、任意の $\{a_n\} \in l^1$ に対して、

$$|g(\{a_n\})| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n g(e_n)\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n\right| \leq \|\{a_n\}\|_1 \|\{c_n\}\|_\infty$$

となるので、$\|g\| \leq \|\{c_n\}\|_\infty$. ゆえに、$\|g\| = \|\{c_n\}\|_\infty$. 最後に、$l^\infty$ の任意の元 c_n に対して、$g(\{a_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n$ とすれば、

$$|g(\{a_n\})| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \|\{c_n\}\|_\infty < \infty, \quad (\{a_n\} \in l^1)$$

が成り立ち、g は l^1 の双対空間の元であり、上の写像により $g \mapsto \{c_n\}$ となるので、この写像は全射である。■

索 引